

■原著論文/ORIGINAL PAPER■

拡散・熱的および流体力学的不安定性のスケール効果

Scale Effects of Diffusive-thermal and Hydrodynamic Instability

柴山 史門・桑名 一徳*

SHIBAYAMA, Shimon and KUWANA, Kazunori*

山形大学大学院理工学研究科物質化学工学専攻 〒992-8510 山形県米沢市城南4-3-16
Yamagata University, 4-3-16 Jonan, Yonezawa, Yamagata 992-8510, Japan

2013年9月20日受付; 2013年12月30日受理/Received 20 September, 2013; Accepted 30 December, 2013

Abstract : The damage caused by an accidental gas explosion, for example the maximal blast pressure, is strongly influenced by the flame propagation velocity during the explosion. The flame propagation during an explosion is significantly affected by flame instability, and it is known that the flame propagation velocity has certain scale dependency. This study investigates scale effects of diffusive-thermal and hydrodynamic instability by numerically solving the Sivashinsky equation. The following four conditions are considered: a purely diffusive-thermally unstable flame, a purely hydrodynamically unstable flame, a flame that is diffusive-thermally stable but hydrodynamically unstable, and a flame that is unstable both diffusive-thermally and hydrodynamically. It is found that diffusive-thermal instability mainly influences the flame wrinkle structure of a specific wavelength, while hydrodynamic instability influences the largest structure. Thus, hydrodynamic instability shows scale dependency. The fractal dimensions of the flames, which can be used to estimate the flame propagation velocity during an explosion, are computed by two different methods: a Fourier analysis and a method based on the scale dependency of flame propagation velocity. The both methods yield consistent results, and it is found that the fractal dimension mainly depends on the thermal expansion ratio; its dependency on the Lewis number is rather weak.

Key Words : Diffusive-thermal instability, Hydrodynamic instability, Scale dependency, Fractal dimension

1. 緒言

化学プラントや危険物取扱施設における爆発事故の未然防止のために、潜在的危険性のリスク評価が有効である[1-3]。このようなリスク評価を行う際、爆発時の火炎伝播速度を正確に見積もることが重要である。これは、爆風圧をはじめとした爆発被害が火炎伝播速度に大きく影響を受けるためである[1]。爆発時のように球状に火炎が伝播する場合、火炎の不安定性のために火炎伝播速度が火炎スケールとともに上昇し、そのスケール依存性は火炎がフラクタル的な構造を持つと考えることで説明できる[4]。そして、火炎伝播速度を火炎のフラクタル次元を用いて表すことができる。したがって、爆発危険性の正確なリスク評価のためには様々な条件でのフラクタル次元を知ることが重要である。

以前の研究[5]では、拡散・熱的に不安定な火炎と流体力学的に不安定な火炎のフラクタル構造を検討した。その結

果、流体力学的に不安定な火炎の構造はフラクタル的なものに対し、拡散・熱的に不安定な火炎はフラクタル的でないことが明らかになった。しかし、実際の火炎は、流体力学的不安定性という観点では常に不安定であるものの、拡散・熱的には安定である場合と不安定である場合がある。そして、拡散・熱的には安定であるが流体力学的に不安定である場合、あるいは、拡散・熱的にも流体力学的にも不安定な場合に、火炎のフラクタル的な性質がどのようになるかは自明ではない。流体力学的に不安定なこれらの条件では火炎がフラクタル性を有すると予想はされるものの、火炎のフラクタル次元がその拡散・熱的な性質にどのように依存するかは不明である。そこで本研究では、このように拡散・熱的および流体力学的不安定性が複合的に働く場合の火炎のフラクタル構造や火炎伝播速度のスケール依存性について数値的に検討する。

* Corresponding author. E-mail: kuwana@yz.yamagata-u.ac.jp

2. 計算モデル

2.1. 基礎方程式

本研究では一方向に伝播する平面火炎を数値解析の対象とする。爆発現象における実際の火炎は着火点を中心として球状に伝播するが、このような火炎はスケールが増加し続けるため、数値解析のコストが高い。これに対して、一方向に伝播する平面火炎は計算領域のサイズにより火炎のスケールを制限できる。また、実際の火炎は三次元的であるが、三次元シミュレーションは計算コストが高いため、今回は二次元シミュレーションを行う。

以前の研究[5]同様、Sivashinsky 方程式[6]を数値的に解くことにより火炎伝播速度を求める。本研究では拡散・熱的および流体力学的不安定性の影響を検討するが、Sivashinsky 方程式はこれらの不安定性に関する二つのパラメータのみを含むため、これらの影響を明確に評価できる。二次元系の平面火炎伝播では Sivashinsky 方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 4(1 + \varepsilon)^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \varepsilon \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 = \gamma I(F) \quad (1)$$

ただし、 $I(F)$ は次のように定義される。

$$I(F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k dk \int_{-\infty}^\infty F(\xi, t) \cos k(x - \xi) d\xi \quad (2)$$

ここで、 F は火炎位置の y 座標、 ε は拡散・熱的不安定性に関するパラメータ、 γ は流体力学的不安定性に関するパラメータである。なお、全ての変数は火炎の熱的厚さおよび既燃気体を基準とした燃焼速度を用いて無次元化してある。

2.2. パラメータ

(1) 式に含まれる二つのパラメータのうち、拡散・熱的不安定性パラメータ ε は、次のように定義される。

$$\varepsilon = (Le_0 - Le)/(1 - Le_0) \quad (3)$$

ここで、 Le は Lewis 数 ($Le = \alpha/D$, α : 熱拡散率, D : 分子拡散係数), Le_0 は臨界 Lewis 数を示す。 $Le > Le_0$ (または $\varepsilon < 0$) の場合、熱拡散の影響が優勢なので火炎は安定である。逆に、 $Le < Le_0$ (または $\varepsilon > 0$) の場合、分子拡散の影響が優勢なので火炎は不安定である。

(1) 式のもう一つのパラメータである、流体力学的不安定性パラメータ γ は、次のように定義される。

$$\gamma = 1 - \rho_b/\rho_u \quad (4)$$

ここで、 ρ_u は未燃気体密度、 ρ_b は既燃気体密度である。通常の燃焼現象では $\rho_u > \rho_b$ なので $0 < \gamma < 1$ である。この場合、流体力学的不安定性により火炎は不安定になる。つま

り、実際の火炎は流体力学的不安定性の観点からは常に不安定である。

なお、(1) 式右辺は火炎前後での密度変化に起因する流速の変化を表す項であるが、(1) 式ではこの効果について $O(\gamma)$ の項までしか考慮されていない。その結果、渦無し流れが暗黙のうちに仮定される。実際の火炎では γ の値は 0.8 程度以上であり、火炎の存在により生じる渦度が流れ場に大きな影響を及ぼすため、Sivashinsky 方程式は現実的な条件では厳密性を欠く。しかし、この項を $O(\gamma^2)$ まで展開し、火炎の存在により生じる渦度を考慮したとしても方程式の形がほとんど変化しないことを示すことができる[7,8]。また、以前の研究[5]で、 $0 < \gamma < 1$ の全範囲に対して (1) 式を基に流体力学的に不安定な火炎のフラクタル次元を求めたが、 $\gamma = 0.8$ 程度における実験データと矛盾しない結果が得られた。したがって、(1) 式を用いても、少なくとも定性的に正しい結果が得られると期待される。しかし、Sivashinsky 方程式には他の仮定、例えば、Lewis 数が $O(1)$ であることなども含まれるため、本研究の結果が厳密に正しいのは Sivashinsky 方程式の仮定が成り立つ条件範囲に限られると解すべきで、他の条件に対する特に定量的な検討は今後の研究課題である。なお、数値シミュレーション結果に対して本研究で用いる解析手法は、実験結果や詳細な CFD 計算の結果に対しても適用可能である。

2.3. 計算条件

本研究で用いた計算条件を表 1 に示す。case I では、 $\gamma = 0$ とすることで、流体力学的不安定性の影響を排除し、拡散・熱的不安定性の影響のみを考慮する。一方、case II では、 $\varepsilon = 0$ とすることで、拡散・熱的不安定性の影響を排除し、流体力学的不安定性の影響のみを考慮する。これらの条件は以前の研究[5]でも計算を実施したが、今回は平均伝播速度の求め方を少し変更したので再度計算を行った。case III は拡散・熱的には安定で流体力学的には不安定な火炎であり、case IV は拡散・熱的にも流体力学的にも不安定な火炎である。これらの条件における ε および γ の値は必ずしも実際の火炎に近いとは言えないが、変数変換[9]によりある条件の計算結果を他の条件における結果に変換できるため、今回の計算条件と実在火炎の間における違いは重要ではない[5]。

計算領域を $-l < x < l$ とし、 $x = \pm l$ で周期的境界条件を採用した。 l の値は 108 から 1448 までの間で変化させた。初

Table 1 The calculation conditions.

case	ε	γ
I	0.5	0
II	0	0.5
III	-0.5	0.5
IV	0.5	0.5

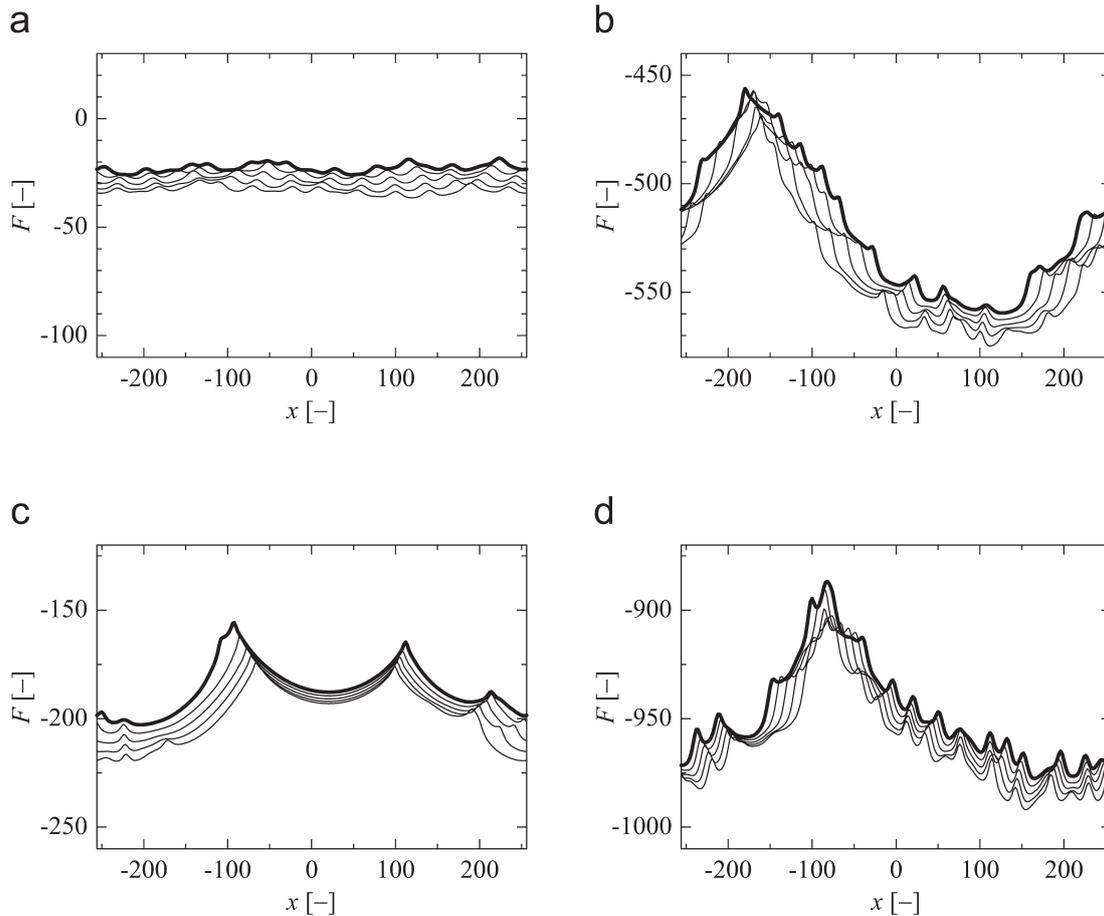


Fig.1 Flame shapes for the computational domain size of 512; (a) case I, (b) case II, (c) case III, and (d) case IV.

期条件には以前の研究[5]と同じものを採用した。平均火炎伝播速度が初期条件に依存しないことは既に確認してある[10]。

3. 計算結果

3.1. 火炎形状

まず始めに、シミュレーションによって得られた結果から、計算領域 $2l=512$ における火炎形状を図1に示す。各グラフの太線は $t=3000$ における火炎形状を示し、火炎は時間の経過と共に $-y$ 方向へ伝播する。

図1aはcase I、つまり、拡散・熱的不安定性のみを考慮した火炎の形状を示す。火炎形状は、 $t=3000-5000$ において $\Delta t=500$ の間隔で示した。火炎はその形状を変化させながら伝播していることが分かる。case Iの場合、30-40の特定の波長を持つ乱れが選択的に成長している。一方、図1bはcase II、つまり、流体力学的不安定性のみを考慮した火炎の形状を示す。火炎形状は、 $t=3000-3080$ において $\Delta t=20$ の間隔で示した。この条件における火炎も、case Iと同様に30-40の特定の波長の乱れを持つ。しかし、同時に、

計算領域サイズ程度の波長を持つ乱れも特徴的に表れている。また、図1cはcase III、つまり、拡散・熱的には安定で流体力学的には不安定な火炎の形状を示している。火炎形状は、 $t=3000-3200$ において $\Delta t=50$ の間隔で示した。この条件において、case I, IIに見られた波長30-40の乱れはほとんど見られず、計算領域サイズの波長のみが特徴的に表れている。さらに、図1dはcase IV、つまり、拡散・熱的不安定にも流体力学的にも不安定な火炎の形状を示している。火炎形状は、 $t=3000-3040$ において $\Delta t=10$ の間隔で示した。case IVの火炎は、case IIの火炎形状とほぼ同様に、特定の波長の乱れと計算領域サイズの乱れを両方持っている。これらの観察結果から、拡散・熱的不安定性は特定の波長に影響するのに対して、流体力学的不安定性は計算領域サイズの波長に影響する、つまり、後者はスケール依存性があると考えられる。また、拡散・熱的に安定な火炎は小スケールの乱れが成長しにくい。

3.2. Fourier 解析

前節の観察結果をより定量的に検討するため、各火炎形状に対してFourier解析を行った(図2)。図2の縦軸は $|\hat{F}|^2$ (\hat{F} はFourier成分)、横軸は波数 k を示し、いずれも対数軸

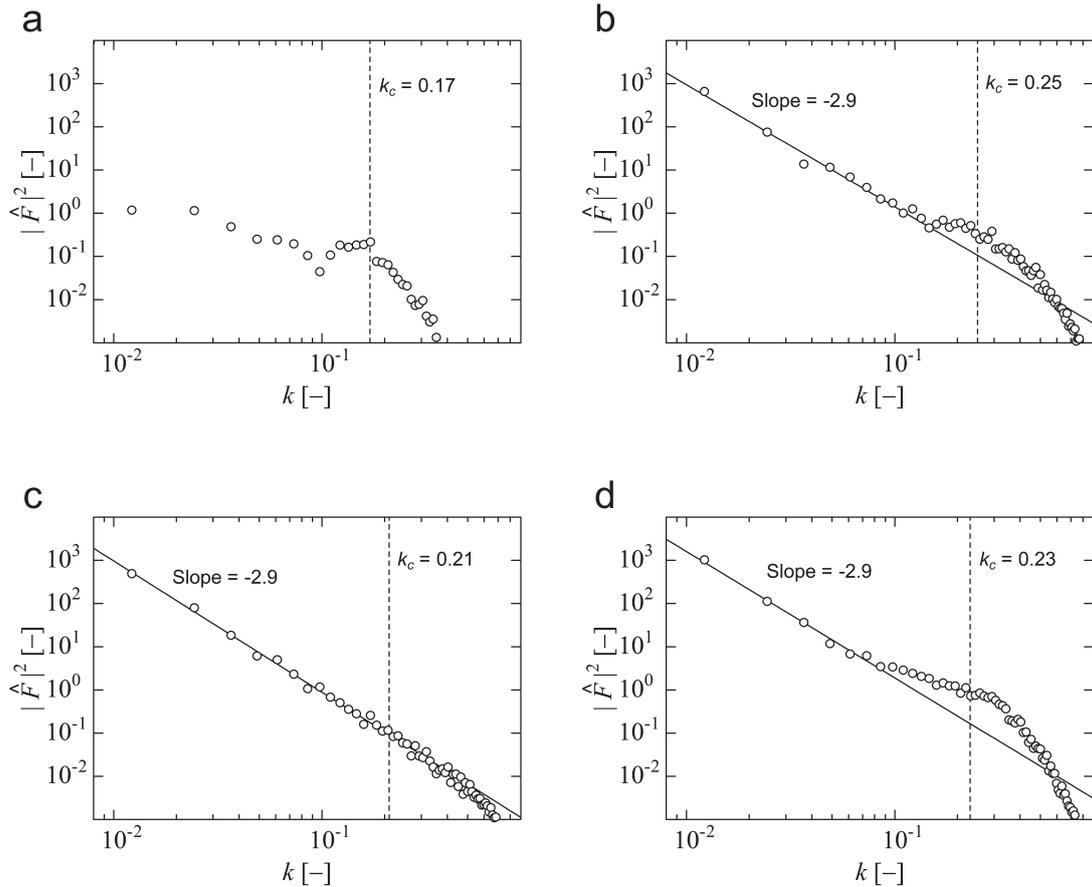


Fig.2 Fourier transform of function F for the computational domain size of 512; (a) case I, (b) case II, (c) case III, and (d) case IV.

である。また、グラフ中の破線は、(1) 式の線形安定解析によって得られる、成長速度が最大の波数 k_c を示す。本研究では、計算領域 $2l = 512$ の各火炎形状に対して、 $t = 500$ から $\Delta t = 500$ の間隔で $t = 10000$ まで Fourier 変換を行い、得られた 20 個の Fourier 成分を平均した。

図 2a は case I (拡散・熱的に不安定な火炎) について Fourier 解析を行った結果である。 $k \leq 10^{-1}$ のとき、 $|\hat{F}|^2$ は波数 k の増加と共に少しずつ減少していることが分かる。しかし、 $k = k_c$ 付近で $|\hat{F}|^2$ が目立って増加している。図 2b は case II (流体力学的に不安定な火炎) についての Fourier 解析結果である。図 2a と同様 $k = k_c$ 付近で $|\hat{F}|^2$ が増加しているが、case II の場合その増加はわずかで、全体としてほぼ冪乗則的に $|\hat{F}|^2$ が変化している。

図 2c (case III つまり拡散・熱的には安定だが流体力学的には不安定な火炎) では $k = k_c$ 付近の極大傾向がほとんど表れず、冪乗則的な $|\hat{F}|^2$ の変化のみが確認できる。図 2d (case IV つまり拡散・熱的にも流体力学的にも不安定な火炎) は、 $k = k_c$ 付近で図 2b (case II) より大きいピークが出ているものの、波数 k が小さい領域では冪乗則的な関係が成り立ち、波数 k が小さいほど $|\hat{F}|^2$ の値が大きくなる。これらの結果から、拡散・熱的不安定性は特定の波長 (k_c に相当する波長) に対して強く影響するが、流体力学的不安定

性はより小さい波数、つまり計算領域サイズの波長に強く影響することが示唆される。流体力学的に不安定な火炎において、線形安定解析で得られる最も成長速度が速い波長よりも、計算領域サイズの波長が優勢に成長するのは現象の非線形性のためである。したがって、流体力学的不安定性の特性スケールは線形不安定解析では得られない。以上の結果は流体力学的に不安定な火炎にはスケール依存性があるということを示し、3.1 節の観察結果を定量的に説明するものである。

ここで、火炎のフラクタル性について考える。 $|\hat{F}|^2$ と波数 k の冪乗則的な関係性はフラクタル曲線の特徴であり、 $|\hat{F}|^2 \sim k^a$ とすると、フラクタル次元 d は、次式で求めることができる[11]。

$$d = (5 - a)/2 \tag{5}$$

図 2 の case II–case IV に (5) 式を適用すると、 $a = 2.9$ なので $d = 1.05$ となる。つまり、火炎のフラクタル次元は流体力学的不安定性の程度 (パラメータ γ の値) のみにより決まり、拡散・熱的な性質 (パラメータ ε の値) には影響されない。この結果は、case I および case II のみを実施した以前の研究[5]では導くことができず、本研究で得られた新しい

知見である. case I については, 冪乗則的な関係を見出せないため, (5) 式は適用されない.

3.3. 火炎伝播速度

ここでは火炎伝播速度のスケール依存性を考える. 図3は, $2l = 108-2896$ における平均火炎伝播速度を示す. ここで, 縦軸は未燃気体に相対的な平均火炎伝播速度 V , 横軸は計算領域の大きさ $2l$ であり, いずれも対数軸である. 平均火炎伝播速度は, $t = 2000-15000$ の平均値として求めた.

まず, case I (拡散・熱的に不安定な火炎) に着目すると, 伝播速度はいずれの計算領域においてもほぼ一定であり, スケールによる速度の変化はほとんど確認できない. 一方 case II (流体力学的に不安定な火炎) では, 計算領域の増加と共に伝播速度が冪乗則的に増加している. case III (拡散・熱的には安定だが流体力学的には不安定な火炎) の場合も, $2l \geq 200$ においては計算領域の増加とともに伝播速度が冪乗則的に増加している. しかし $2l \leq 200$ の小さい計算領域においては, case I のように伝播速度はほぼ一定で変化が見られない. これは, 小スケール火炎では拡散・熱的な性質が重要なものに対し, 大スケール火炎では流体力学的不安定性が支配的なためだと考えられる. つまり, 火炎スケールが小さい場合は拡散・熱的な安定性が強く影響し流体力学的不安定性が抑制されるので伝播速度にスケール依存性がみられないものの, 火炎スケールが大きくなると流体力学的不安定性が強く影響し伝播速度のスケール依存性が発現する. 図4に, case III の条件で計算領域サイズを $2l = 108$ として得られた火炎形状を示す. 流体力学的不安定性に特徴的な計算領域サイズの乱れが存在はするものの, あまり成長していないことがわかる.

最後に case IV (拡散・熱的にも流体力学的にも不安定な火炎) の場合は, case II のように伝播速度が冪乗則的に増加しており, 伝播速度がスケールに依存している. case IV は case III とは異なり, スケールが小さい場合でも流体力学的不安定性が抑制されない. 流体力学的不安定性が抑制されなければ, 伝播速度の冪乗則的な上昇があらわれるものと考えられる. これらの結果から, 流体力学的に不安定な火炎の場合, 拡散・熱的な性質に関わらず, 少なくともスケールが大きい条件では伝播速度が冪乗則的に増加することがわかる. また, case II-case IV で伝播速度の火炎速度に対する冪乗則的な依存性は変わらず, 比例係数が変化するのみである. つまり, 冪乗則的な依存性は流体拡散・熱的な性質 (パラメータ ε の値) に依らず流体力学的不安定性の程度 (パラメータ γ の値) のみにより決まる.

ここで, 火炎のフラクタル性について考える. 火炎伝播速度が火炎面積 (今の場合は火炎の長さ) に比例すると考えると図3は火炎面積のスケール依存性を表しており, この両対数プロットの傾きから火炎のフラクタル次元を求められる[5,10]. 図3における傾きは, case II-case IV のいずれにおいても約 0.05 であり, このことからフラクタル次元 d は火炎の拡散・熱的な性質に依らず $d = 1.05$ と求められる.

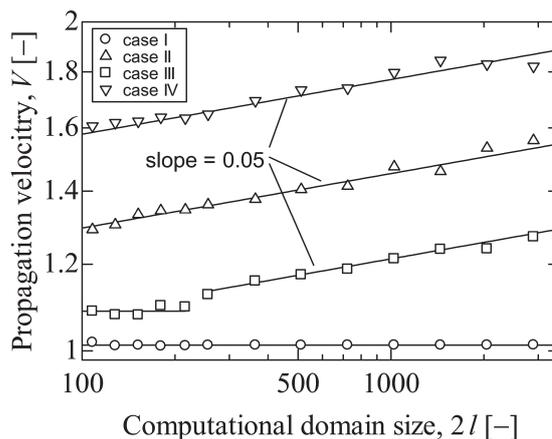


Fig.3 Scale dependency of flame propagation velocity.

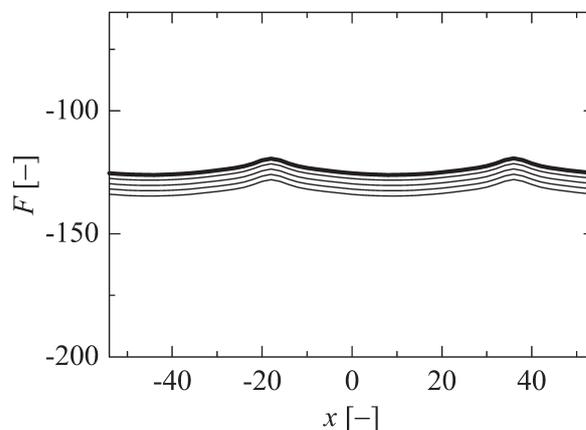


Fig.4 Flame shape for the computational domain size of 108 in case III.

る. この結果は, 前節の Fourier 解析によるものと一致する. ただし, $2l \leq 200$ の計算領域における case III の結果のように, 拡散・熱的な性質により火炎が安定化される場合はフラクタル性を確認できない. なお, 以前の研究[5]では, 図3における case II の傾きを約 0.06 と報告した. 今回の結果がわずかに異なるのは, 平均火炎伝播速度を決定する時間範囲を $t = 2000-15000$ と広げたこと, および, 傾きを定めるための計算領域サイズ $2l$ の最大値を 2896 まで増やしたことが原因である.

以上をまとめると, 火炎のフラクタル次元は流体力学的不安定性の程度を表すパラメータ γ (あるいは気体の膨張率) に強く依存し, 拡散・熱的な性質 (あるいは Lewis 数) にはほとんど依存しない. そして, $\gamma = 0.5$ のとき, $d = 1.05$ である. フラクタル次元の γ 依存性については以前の研究[5]で検討されている. それによると, $\gamma = 0$ のとき $d = 1$ で, d は γ の増加とともに増加する.

4. 結言

Sivashinsky 方程式を数値的に解くことで, 火炎伝播挙動

に及ぼす火炎面不安定性機構の影響を火炎のフラクタル性ととともに検討した。今回設定した条件は、拡散・熱的不安定性の影響のみを考慮した case I, 流体力学的不安定性の影響のみを考慮した case II, 拡散・熱的には安定性で流体力学的には不安定な条件である case III, 拡散・熱的にも流体力学的にも不安定な条件である case IV の 4 条件である。

case I の火炎では、30-40 の特定の波長が選択的に成長した。また、この火炎形状に Fourier 解析を実施したところ、線型安定解析的に火炎の成長速度が最大となる波数 (k_c) で極大となることが確認できた。一方、case II-case IV の火炎形状では計算領域サイズの乱れが大きく成長した。これらを Fourier 解析すると、Fourier 成分と波数の間に冪乗則的な関係を見出すことができ、計算領域サイズの波長が強く影響していることが分かった。このことから、流体力学的不安定性はスケール依存性を持つと言える。また、この冪乗則的な関係からフラクタル次元を求めると、どの場合も $d = 1.05$ となった。つまり、火炎のフラクタル次元は流体力学的不安定性の程度のみにより決まり、拡散・熱的な性質には影響されない。なお、拡散・熱的不安定性のみを考慮した火炎はフラクタル的ではない。さらに、火炎伝播速度と火炎スケールの関係について検討した。拡散・熱的不安定性の効果のみが働く case I の場合、伝播速度はスケールに依存せずほぼ一定となったが、流体力学的不安定性が働く場合、計算領域の増加に伴って伝播速度は冪乗則的に増加した。ただし、拡散・熱的には安定な case III の場合、小スケールでの伝播速度は case I と同様にほぼ一定となった。これは拡散・熱的に安定な条件では小スケールの乱れは安定化されるためである。また、伝播速度と計算領域の関係からも火炎のフラクタル性について検討したところ、Fourier 解析と同様な結果が得られた。

以上より、火炎のフラクタル次元は流体力学的不安定性の程度(気体の膨張率)に強く依存することがわかった。この依存性については以前の研究[5]で検討しており、 γ の増加、つまり膨張率の増加とともにフラクタル次元が増加する。一方、フラクタル次元の Lewis 数への依存性は弱い。

爆発時の火炎伝播速度を火炎のフラクタル次元を用いて予測する際に本研究の結果を活用できると期待される。なお、今回の結果は Sivashinsky 方程式により得られたものであり、特に γ が大きい条件で定量的な精度に欠ける可能性がある。しかし、本研究で用いた手法は詳細な CFD 計算あるいは実験結果にも適用可能である。今後は、CFD 計算や実験によりフラクタル次元の精度を高めていく予定である。

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 24310118 の助成を受けて実施したものである。

References

1. Dobashi, R., Kawamura, S., Kuwana, K. and Nakayama, Y., *Proceedings of the Combustion Institute* 33: 2295-2301 (2011).
2. Tomizuka, T., Kuwana, K., Shimizu, K., Mogi, T., Dobashi, R. and Koshi, M., *Journal of Loss Prevention in the Process Industries* 26: 369-373 (2013).
3. Tomizuka, T., Kuwana, K., Mogi, T., Dobashi, R. and Koshi, M., *International Journal of Hydrogen Energy* 38: 5176-5180 (2013).
4. Gostintsev, Yu. A., Istratov, A. G., and Shulenin, Yu. V., *Combustion, Explosion, and Shock Waves* 24: 563-569 (1988).
5. Mukaiyama, K., Shibayama, S. and Kuwana, K., *Combustion and Flame* 160: 2471-2475 (2013).
6. Sivashinsky, G. I., *Acta Astronautica* 4: 1177-1206 (1977).
7. Sivashinsky, G. I. and Clavin, P., *Journal de Physique* 48: 193-198 (1987).
8. Joulin, G. and Cambay, P., *Combustion Science and Technology* 81: 243-256 (1992).
9. Michelson, D. M. & Sivashinsky, G. I., *Acta Astronautica* 4: 1207-1221 (1977).
10. Mukaiyama, K. & Kuwana, K., *Journal of Loss Prevention in the Process Industries* 26: 387-391 (2013).
11. Falconer, K., *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, 2nd ed., Wiley (2003).