

■原著論文／ORIGINAL PAPER■

近臨界混合表面液ジェットの特ロー型不安定性の研究

— 乱流微粒化機構を探るための基礎的な考察 —

A Study on Taylor Type Instability of Near-Critical-Mixing Surface Jet

— Fundamental Consideration for Insight into Turbulent Atomization Mechanism —

梅村 章\*

UMEMURA, Akira\*

名古屋大学大学院工学研究科 〒464-8603 名古屋市千種区不老町  
Nagoya University, Furo, Chikusa, Nagoya 464-8603, Japan

2002年10月26日受付, 2003年2月3日受理 / Received 26 October 2002; Accepted 3 February 2003

**Abstract :** Our micro-gravity experiment on a round SF<sub>6</sub> liquid jet issued into an otherwise stagnant N<sub>2</sub> gas at room temperature showed that the Taylor instability excited immediately downstream of the nozzle exit disappeared at pressures exceeding a certain value (7.6 MPa). In the present paper, the mathematics and physics of Taylor instability are fully explored to disclose various aspects overlooked in the conventional atomization theory. Then, the analysis is extended to analyze the Taylor instability property for a liquid jet with near-critical-mixing surface. The following are found. The growth rate is not crucially affected by the thermodynamic state of the liquid surface. Instead, the emergence of Taylor instability crucially relies on the value of surface tension because Taylor instability can not be excited when the jet speed exceeds the speed of capillary wave which propagates upstream from the disturbed region.

**Key Words :** Taylor Instability, Turbulent Atomization Mechanism, Capillary Wave, Near-Critical-Mixing Surface

1. 緒言

静止気体中に高速噴射された円形液体ジェットは乱流微粒化して噴霧を作る。その過程は、次の3段階を踏んで起きると考えられている。(1) 噴射液に特ローの不安定性[1]が発生して表面に皺ができる。(2) 非線形な流体力学的作用によって皺の一部が外側に引きのばされて液糸が多数形成される[2] (図1)。(3) 細長い液体 (液糸) は力学的に不安定であるので、液糸が分断されて液滴が作られる[3,4]。従って、円形液体ジェットで発生する乱流微粒化の機構を解明するための第一歩は、特ローの不安定性の特性をよく理解することである。

噴射液と周囲気体との間の相対速度が大きければ、剪断層の厚みが噴射液の半径に比べて十分小さくなりうる。このときには、剪断層の近傍に生じる流れに曲率が効くことはなく、表面近くの流れは平面問題として扱うことができ

る。特に、圧力が噴射液の臨界圧力より十分低いときには、液相と気相の密度はそれぞれ一様であると考えて良い。このような条件での液面の不安定性を論じたのが特ローの解析である。噴射速度の増大に伴って小さな液滴が作られ

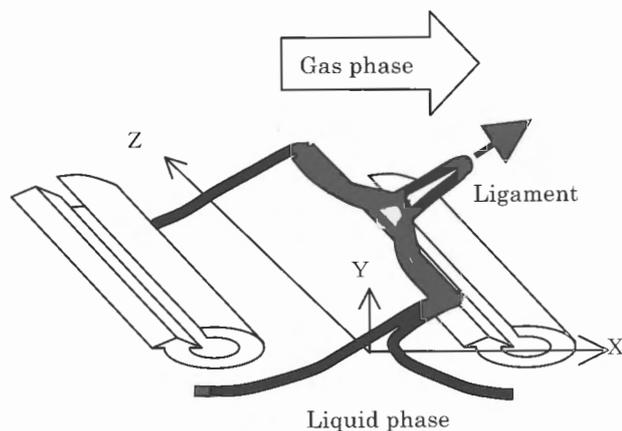


Fig. 1 Formation of ligaments from a liquid surface.

\* Corresponding author. E-mail : yamamoto@mech.tut.ac.jp

る事実は、上述の微粒化プロセスの妥当性を示唆しており、これまでの微粒化関連の論文の中で、しばしばテーラーの解析が引用されている。しかし、テーラーの解析の成立条件については必ずしもよくわかっている訳ではない。

テーラーの不安定性に対する従来の理解は、主として標準状態の水を用いたジェットでの実験の観察によって発展させられてきたものであり、噴射液と雰囲気との密度の間に大きな差があり、表面張力が大きくて、気相の密度が一樣であるとみなせる場合に妥当である。しかし、今日の高負荷エンジンでは熱効率を上げるために高压で噴霧燃焼させている。このときの噴射液の微粒化過程は、表面での気液密度比が1に近く、且つ表面張力が小さくなるために、これまでのテーラーの不安定性の理解では説明できない現象が現れる可能性がある。実際、テーラーの解によれば、

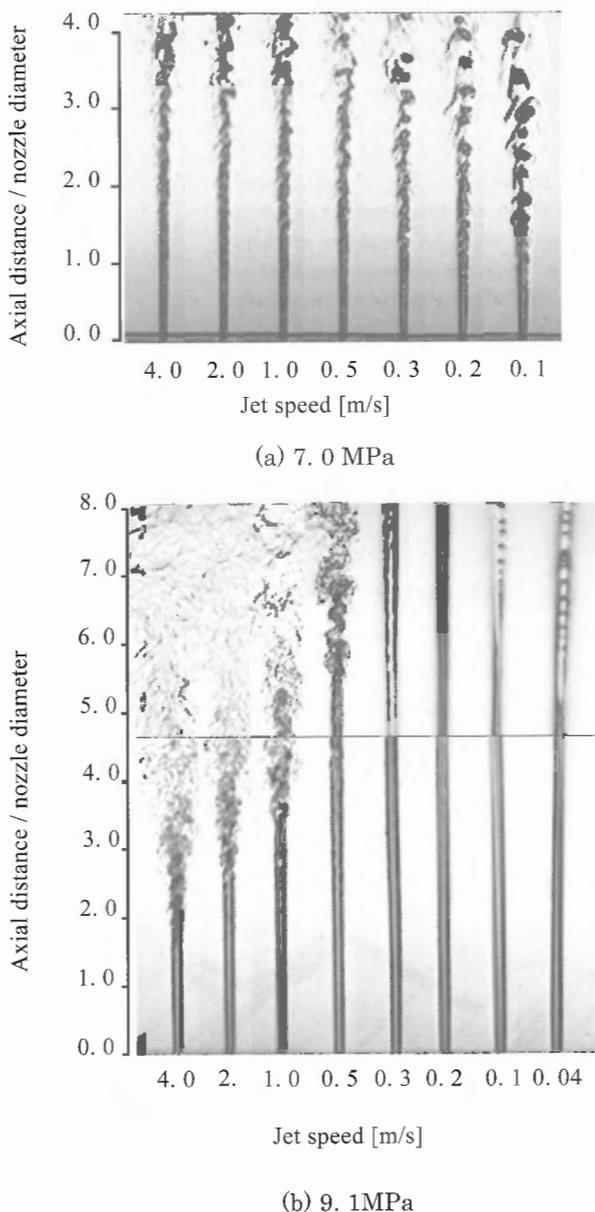


Fig. 2 A drastic change in instability feature.

表面張力が零に近づくと不安定性の強度は無限大になるが、圧力が噴射液の臨界圧力より十分高ければ、噴射液は表面を持たないので、表面張力による液体の分断は生じない。このときには、ジェット流の乱流化に伴って液体の大変形が起き、乱流の微細渦と同様に液体の筋を作って、次第に雰囲気ガスの中にとけ込んでいく[5]。すなわち、噴射液と雰囲気の種類に対応して、ある圧力を境[6]にして、(同じように見えても)微粒化機構に質的な変化が起きるはずであるが、この遷移の仕方については、これまで何も明確な知見が得られていない。

最近筆者らが行った実験[7] (直径 0.1 mm のノズルから静止  $N_2$  ガス中に  $SF_6$  液を噴射した。  $SF_6$  の臨界圧力は 3.8 MPa, 臨界温度は 318 K で室温に近い) によって以下の事柄があきらかになった。実験では、噴射液と雰囲気との温度を低め (室温) に設定し、蒸発を極力抑えた状態で、液体の臨界圧力以上で上げていったときの低速噴射液の挙動の変化を調べた。この条件では、ノズル内でキャビテーションが起きることはなく、また、レイノルズ数が低く抑えられているので、ノズルを出るときの液体の流れは層流である。圧力を 5 MPa から上げていくと、噴射液の表面が次第に臨界混合状態に近づいていき、ついには、ノズルから噴射された液体が初めから表面を持たない状態になる。この間の微粒化の様子の変化を調べた結果、圧力の上昇によってはじめ分断距離が短くなるが、ある圧力 (7.6 MPa) を越えると急に分断距離が伸びることがわかった (図 2)。このときの噴射液の状態はノズルの近く (7.6 MPa より低い圧力では既にこの位置で噴射液の表面が変形を起こしている) で層流であり、下流についてジェットが蛇行的な流体力学的不安定性にさらされた後に液柱の分断が起きる。この事実は、ある圧力を境にしてテーラー型の不安定性が消失することを示唆している。そこで、本論文では、テーラーが直感的に定式化した理論の数理構造をあきらかにして、理論の成立条件を調べることから出発して、高压系への理論の拡張を行ってレーリー・テーラー理論の理解を完全にした後、上記の実験で見いだされた新しい知見を理論つける提案を行い、乱流微粒化との関連性について言及する。

本論文の構成は次の通りである。はじめに、上述の現象が従来の微粒化理論によって説明できないことを示す。この論証が意味を持つためには、従来の微粒化理論に対して統一的な認識が持たれていなければならないが、過去の文献を見ると、テーラーの理論の理解は十分でなく、間違っただけも多い。そこで、本論文では、かなりのスペースを費やしてテーラーの理論の数理構造を明確にするための解析を行う。その手順としては、はじめに、気液相の密度がそれぞれ一定と見なせる場合に対して平面問題のテーラーの不安定性の解析の数理構造を詳しく調べ、従来看過されてきた重要な知見を幾つか導く。その後、超臨界雰囲気中に噴射された液体ジェットのように表面近くに急激な密度変化を持つ円形ジェットの問題に解析を拡張してテーラー解の特性を調べる。その結果は、上述の実験結果を直接

説明できないことより, 最後にテラ-の不安定性の発生機構そのものを考察して, 実験結果の説明を与える. この一連の解析を通して, テラ-の不安定性の本性があきらかになると共に, これまでの微粒化研究で未解決のまま残されている実用上重要な幾つかの問題に対しても理論的に答えることができるようになる.

## 2. 理論

### 2.1. テラ-の理論の成立条件の吟味

#### 2.1.1. 問題の定式化

図 3(a) に示すように, 液体 (一様密度  $\rho_{*0}$ , 粘性係数  $\mu_{*0}$ ) と気体 (一様密度  $\rho_0$ , 粘性係数  $\mu_0$ ) が, それぞれ半無限空間  $y < 0$  と  $y > 0$  を占めている場合を考える. 図 3(a) は, 静止気体中に一様流速  $u_\infty$  で左向きに噴射した液体の表面の近傍の様子を示す. 噴射液に乗って観察しているので, 表面から離れた位置の気体は右向きに一様速度  $u_\infty$  で流れている. 気液速度差  $u_\infty$  により表面の近くには剪断層が作られている. 気相側と液相側の剪断層厚みをそれぞれ  $\delta$  および  $\delta^*$  とする. 一般に剪断層の厚みは表面 ( $x$  軸) に沿って変化するが, 剪断層が薄ければ  $x$  方向の流れの変化は  $y$  方向の変化に比べて十分小さくなる. 従って, 以下の解析で考える  $x$  の区間においては,  $x$  方向の流れの変化を無視して, 一方向的な流れ  $u = u_0(y)$  が全域 (液体が占める半無限空間  $y < 0$  と気体が占める半無限空間  $y > 0$ ) で実現していると仮定する (基礎流の数学的理想化).

上述の基礎流の液面が, 正弦波状に変形したとしよう (図 3(b)). 液面の変形が緩やかであれば, 基礎流と同じように, (変形した) 液面に沿った一方向的な流れになる. このときには, 液面の変形に対応した流線の曲がりによって, 基礎流にはなかった  $y$  方向の速度成分が現れる. このような液面の変形に伴う  $y$  速度成分の発生によってもたらされる流体力学的な不安定性を論じたのがテラ-の解析であると考えられる. そこで, この考えに基づいて問題を数学的に厳密に定式化していくと, 以下のようになる.

液面の変形による変位を  $Y(t, x)$  で表す. 各瞬間の液面の形状に適合した座標  $(\xi, \eta)$  を

$$x = \xi, \quad y = Y(t, x) + \eta \tag{1}$$

によって導入する. すると, 液面は常に座標面  $\eta = 0$  で表されることになる. 液面の変形に対応して  $x, y$  方向の速度成分  $(u, v)$  と圧力  $p$  に変化が生じる. そこで,

$$u = u_0(\eta) + u', \quad v = v', \quad p = p_0 + p' \tag{2}$$

と置くと, 微小な液面変位  $Y$  に対して変動量  $u', v', p'$  も微小量になる.

新しい座標を用いて, 変動量  $(u', v', p')$  に対する支配方程式を書き下す. 微小量  $(Y, u', v', p')$  に関して 1 次の項だけ

を拾うと次のようになる. (場の方程式は, 気相と液相で同じ形になるので, 気相の式で代表させる. 液相量は下添字 \* を付けて気相量と区別する.)

場の方程式:

$$\frac{\partial u'}{\partial \xi} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{du_0}{d\eta} + \frac{\partial v'}{\partial \eta} = 0 \tag{3}$$

$$\rho_\infty \left[ \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{du_0}{d\eta} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial \xi} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} u_0 \frac{du_0}{d\eta} + v' \frac{du_0}{d\eta} \right] = -\frac{\partial p'}{\partial \xi} + \mu_\infty \left[ \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \frac{du_0}{d\eta} + \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} \right] \tag{4}$$

$$\rho_\infty \left[ \frac{\partial v'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v'}{\partial \xi} \right] = -\frac{\partial p'}{\partial \eta} + \mu_\infty \left[ \frac{\partial^2 v'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial \eta^2} \right] \tag{5}$$

境界条件:

$$\text{無限遠 } (|\eta| \rightarrow \infty): u', u'_s, v', v'_s \rightarrow 0 \tag{6}$$

$$\text{液面 } (\eta = 0): u' = u'_s, \quad v' = v'_s \tag{7}$$

$$\mu_\infty \left( \frac{\partial u'}{\partial \eta} + \frac{\partial v'}{\partial \xi} \right) = \mu_{*0} \left( \frac{\partial u'_s}{\partial \eta} + \frac{\partial v'_s}{\partial \xi} \right) \tag{8}$$

$$p'_s - 2\mu_{*0} \frac{\partial v'_s}{\partial \eta} - p' + 2\mu_\infty \frac{\partial v'}{\partial \eta} = -\sigma \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \tag{9}$$

ここに  $\sigma$  は表面張力を表す. 座標  $(\xi, \eta)$  を用いて表現した式の利点は, 液面での境界条件が物理的に自然な形で表現できる点である (元の式で微小液面変位に対する摂動法を適用すると, 本来定義されない領域での流れ変数の勾配が現れることになる).

(a) 内部解

連続の式 (3) を気相の剪断層 ( $0 \leq \eta \leq \delta$ ) を横断して積分すると

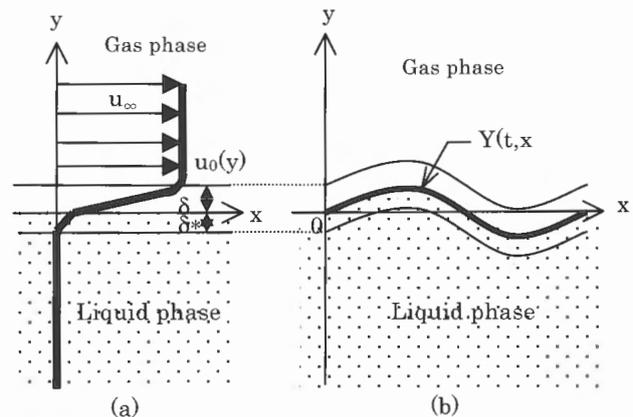


Fig. 3 Basic flow configuration and Taylor instability.

$$v'(\eta = \delta) - v'(\eta = 0) + \int_0^\delta \frac{\partial u'}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial Y}{\partial \xi} [u_0(\eta = \delta) - u_0(\eta = 0)] = 0 \quad (10)$$

となる。ここで、 $u'$  の  $\xi$  方向の変化がゆるやかで、剪断層の厚みが小さいときには、積分項の寄与は無視できる。しかし、 $u_0(\eta = \delta) - u_0(\eta = 0)$  は剪断層厚みに拘わらず大きな値を取りうる。よって、

$$v'(\eta = \delta) - v'(\eta = 0) = [u_0(\eta = \delta) - u_0(\eta = 0)] \frac{\partial Y}{\partial \xi} \quad (11)$$

式 (10) から式 (11) に移す際に導入した仮定をもっと詳しく述べれば、次のようになる。擾乱波の波長の代表値を  $l$  で表し、液面の変形の半振幅を  $\Delta$  とする。気相剪断層に対して (液相剪断層に対しても同様)、式 (3) の各項の大きさは、右から順に、 $v'/\delta$ ,  $u'/l$ ,  $(u_\infty/\delta)(\Delta/l)$  と評価できる。従って、式 (11) が成立するためには、 $(v'/\delta) \sim (u_\infty/\delta)(\Delta/l) \gg (u'/l)$  で、且つ、 $u' \sim v'$  (ここで求める内部解が、後述の外部解と無自己撞着的に接合するための条件と一致する) である必要があり、そのためには、 $(\delta/l) \ll 1$  すなわち、剪断層厚みに比べて波長が十分長くなければならない。

液面で

$$v'(\eta = 0) = \frac{\partial Y}{\partial t} + u_0(\eta = 0) \frac{\partial Y}{\partial \xi} = v'_s(\eta = 0) \quad (12)$$

が成立するから、式 (11) は

$$v'(\eta = \delta) = \frac{\partial Y}{\partial t} + u_0(\eta = \delta) \frac{\partial Y}{\partial \xi} \quad (13)$$

と書き換えられる。同様に、液相に対して

$$v'_s(\eta = -\delta_s) = \frac{\partial Y}{\partial t} + u_0(\eta = -\delta_s) \frac{\partial Y}{\partial \xi} \quad (14)$$

が得られる。式 (13) と (14) は、剪断層の外側の流れを解くのに必要な境界条件を与える。

上で行ったと同様の計算を繰り返して、式 (13) (14) と同じ式が剪断層内の任意の位置  $\eta$  で成立することがわかる。速度分布  $v'$  が決まれば、 $y$  方向の運動方程式 (5) を積分して圧力分布が決まる。気相剪断層を横断して積分して

$$\int_0^\delta \rho_0 \left[ \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \left[ \left( \frac{\partial Y}{\partial t} + u_0 \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) d\eta \right] = p(\eta = 0) - p(\eta = \delta) - \mu \frac{du_0}{d\eta}(0) \frac{\partial Y}{\partial \xi} \quad (15)$$

を得る。また、液相剪断層から

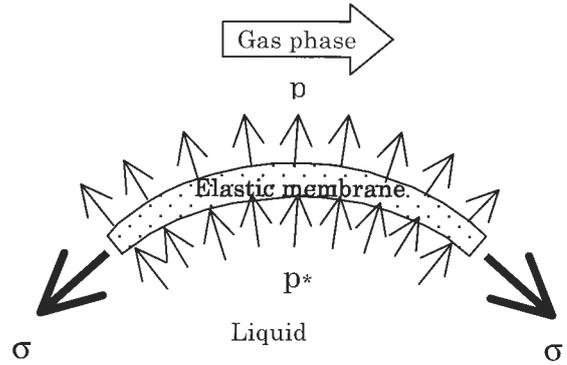


Fig. 4 Principle of Taylor Instability.

$$\int_0^{-\delta_s} \rho_{s0} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + u_{s0} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \left[ \left( \frac{\partial Y}{\partial t} + u_{s0} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) d\eta \right] = p_s(\eta = 0) - p_s(\eta = -\delta_s) - \mu_s \frac{du_{s0}}{d\eta}(0) \frac{\partial Y}{\partial \xi} \quad (16)$$

を得る。これら2つの式を引き算して

$$p_s(\eta = 0) - p(\eta = 0) = p_s(\eta = -\delta_s) - p(\eta = \delta) - \int_{-\delta_s}^\delta \rho_0 \left[ \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \left[ \left( \frac{\partial Y}{\partial t} + u_0 \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) d\eta \right] \quad (17)$$

を得るから、界面条件 (9) は

$$\int_{-\delta_s}^\delta \rho_0 \left[ \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \left[ \left( \frac{\partial Y}{\partial t} + u_0 \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) d\eta \right] = p'_s(\eta = -\delta_s) - p'(\eta = \delta) + \sigma \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \quad (18)$$

となる。これより、基礎流が気液界面で剪断応力の連続性を満たしている限り、粘性力は剪断層を横断した圧力差に直接影響を与えないことが知れる。また、式 (18) の左辺の積分は剪断層の加速運動による慣性力を表すから、剪断層は、2つの流体の流れを仕切る弾性膜 ( $x$  方向に速度  $u_0 \sim u_s$  で移動する) と基本的に同じ運動 (流体連成振動) をすることがわかる (図4)。

(b) 外部解

剪断層の外側で基礎流は一樣であるから、擾乱流に対する支配方程式は

$$\frac{\partial u'}{\partial \xi} + \frac{\partial v'}{\partial \eta} = 0 \quad (19)$$

$$\rho_\infty \left[ \frac{\partial u'}{\partial t} + u_\infty \frac{\partial u'}{\partial \xi} \right] = -\frac{\partial p'}{\partial \xi} + \mu_\infty \left[ \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} \right] \quad (20)$$

$$\rho_\infty \left[ \frac{\partial v'}{\partial t} + u_\infty \frac{\partial v'}{\partial \xi} \right] = -\frac{\partial p'}{\partial \eta} + \mu_\infty \left[ \frac{\partial^2 v'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial \eta^2} \right] \quad (21)$$

となる。これより、擾乱圧力がラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial \eta^2} = 0 \quad (22)$$

を満すことがわかる。

上の方程式系 (19)-(21) において座標と時間を代表長  $\ell$  と動粘性係数  $\nu_0$  を用いて無次元化したとき、テーラーの解析は、レイノルズ数  $u_\infty \ell / \nu_0$  が大きな値を取って、粘性項が無視できる場合を扱ったものになっている。このときの一般解は容易に求まって以下ようになる。

波数  $k$  と複素位相速度  $c$  を導入して、各擾乱量の  $x, t$  に対する依存性を  $\exp[ik(x-ct)]$  とする。すなわち、

$$Y = \Delta e^{ik(x-ct)} + c.c. \quad (23)$$

$$(u', v', p') = (U(\eta), V(\eta), P(\eta)) e^{ik(x-ct)} + c.c. \quad (24)$$

と置く。剪断層の外側の各擾乱量の振幅は、無限遠方で消失しなければいけないことより、

$$P = A \exp(-k\eta), \quad P_* = A_* \exp(k\eta) \quad (25)$$

$$U = -\frac{A}{\rho_\infty(u_\infty - c)} \exp(-k\eta), \quad U_* = -\frac{A_*}{\rho_{*\infty}(-c)} \exp(k\eta) \quad (26)$$

$$V = -i \frac{A}{\rho_\infty(u_\infty - c)} \exp(-k\eta), \quad V_* = i \frac{A_*}{\rho_{*\infty}(-c)} \exp(k\eta) \quad (27)$$

と求まる。

式 (27) に式 (13)(14) の条件を適用して

$$V(\eta = \delta) = -i \frac{A}{\rho_\infty(u_\infty - c)} ik(u_\infty - c)\Delta$$

$$V_*(\eta = -\delta_*) = i \frac{A_*}{\rho_{*\infty}(-c)} ik(-c)\Delta \quad (28)$$

を得るから、未定係数が

$$A = -k\rho_\infty(u_\infty - c)^2 \Delta, \quad A_* = k\rho_{*\infty}(-c)^2 \Delta \quad (29)$$

と定まる。

上の結果より、擾乱量の大きさが

$$u' \sim v' \sim k\Delta u_\infty \sim \frac{u_\infty \Delta}{\ell}, \quad p' \sim \frac{\rho_\infty u_\infty^2 \Delta}{\ell} \quad (30)$$

であることがわかる。この関係は、当然、式 (11) の下に書いた事柄と矛盾しない。また、変動圧はベルヌーイの式から導かれる関係 ( $p' \sim -\rho_\infty u_\infty u'$ ) と一致していることに注意しよう。

(c) 分散関係式

簡単のため、式 (18) において、 $u_0$  は剪断層を横断してどこでも表面速度  $u_s$  に等しいと仮定する。すると、式 (23), (24), (25) および (29) を用いて、式 (18) は次のように表現できる。

$$-k(u_s - c)^2(\rho_\infty \delta + \rho_{*\infty} \delta_*) = \rho_{*\infty}(-c)^2 + \rho_\infty(u_\infty - c)^2 - k\sigma \quad (31)$$

ここで、 $k\delta \ll 1$  としているから、左辺を無視して

$$\rho_{*\infty}(-c)^2 + \rho_\infty(u_\infty - c)^2 = \sigma k \quad (32)$$

の条件式を得る。これは複素位相速度  $c$  に対する決定方程式であり、テーラーが求めた関係式に一致する。解は次のようになる。

$$-c = \frac{\rho_\infty u_\infty \pm \sqrt{\rho_{*\infty} \left\{ (\rho_{*\infty} + \rho_\infty) \frac{\sigma k}{\rho_{*\infty}} - \rho_\infty u_\infty^2 \right\}}}{\rho_{*\infty} + \rho_\infty} \quad (33)$$

すなわち、

$$k < \frac{\rho_\infty}{\rho_{*\infty} + \rho_\infty} \frac{\rho_{*\infty} u_\infty^2}{\sigma} \quad (34)$$

を満す波数に対して不安定波が存在し、最大増幅率とそれを与える波数は次のようになる。

$$\omega_{\max} = \frac{2\rho_\infty \sqrt{\rho_\infty \rho_{*\infty}}}{3\sqrt{3}(\rho_{*\infty} + \rho_\infty)^2} \frac{\rho_{*\infty} u_\infty^3}{\sigma} \quad (35)$$

$$k_{\max} = \frac{2\rho_\infty}{3(\rho_{*\infty} + \rho_\infty)} \frac{u_\infty^2}{\sigma} \quad (36)$$

この解析では、基礎流に関して、剪断層の速度分布の具体的な形は問題にしていない点に注意しよう。剪断層が薄く一方向的な流れになっていれば、剪断層流れは、噴射管あるいは仕切板によって作られる速度欠損部を持った速度分布の形になっていてもよいのである。一樣流状態にある液体と気体の外部流間の速度差に関連して、剪断層の蛇行が作る圧力変化が不安定性を生んでいる点をよく認識しておくことが、テーラーの解析の応用範囲を広げる上で大切である。ここでは、完全を期すために、テーラーの解析の不備な点に着目して、もっと一般的な特性まで調べておこう。それというのも、式 (35)(36) によれば、高压化によって表面張力  $\sigma$  が零に近づき、且つ気液密度比が 1 に近づくと、増幅率と波数が限りなく大きくなって、序論で述べた我々の実験結果 (噴射液の表面状態が臨界混合状態に近づくとテーラーの不安定性が消える) とは一致しないからである。

大きな波数を持った不安定波は、剪断層厚みと、剪断層厚みに基づいたレイノルズ数  $Re = u_\infty \delta / \nu_0$  が表面張力に独立であることより、外部解が非粘性的な流れになっているための条件  $Re(\ell/\delta) \gg 1$  すなわち  $k\delta \ll Re$  に抵触する (式 (36) が条件  $k_{\max} \delta \ll Re$  を満すためには  $\mu_\infty u_\infty / \sigma \ll 1$  でなければならない)。波数の大きな不安定波に対しては、例え  $\delta \ll \ell$  が成立しても (理想的には、どのような噴射速度

に対しても,  $x$  を小さく取れば満たすことができる), 外部流で粘性が効くようになるので, 高い波数の乱れの増幅率は粘性によって抑えられることになるであろう.

実際, 式 (20) と (21) の粘性項を含めて外部解を求めると, 分散関係式は下記のように修正される. 圧力の解の形は式 (25) と変わらない. 式 (21) より, 複素振幅  $V$  に対する支配方程式は

$$ik\rho_\infty(u_\infty - c)V = kAe^{-k\eta} + \mu_\infty \left[ -k^2V + \frac{d^2V}{d\eta^2} \right] \quad (37)$$

となる. この方程式の解で, 無限遠で消失するものは

$$V = \frac{kA}{ik\rho_\infty(u_\infty - c)} e^{-ky} + C \exp \left[ -\sqrt{k^2 + \frac{ik\rho_\infty(u_\infty - c)}{\mu_\infty}} y \right] \quad (38)$$

となる. 内部解との接続条件

$$V = ik(u_\infty - c)\Delta \quad (39)$$

$$\frac{dV}{d\eta}(\eta \rightarrow \delta) = ik \frac{du_0}{d\eta} \Delta \rightarrow 0 \quad (40)$$

を適用して係数  $A$  と  $C$  を決定できる. 特に

$$A = \frac{-k\rho_\infty(u_\infty - c)^2 \Delta}{1 - \frac{k}{\sqrt{k^2 + \frac{ik\rho_\infty(u_\infty - c)}{\mu_\infty}}}} \quad (41)$$

同様にして, 液相の解から

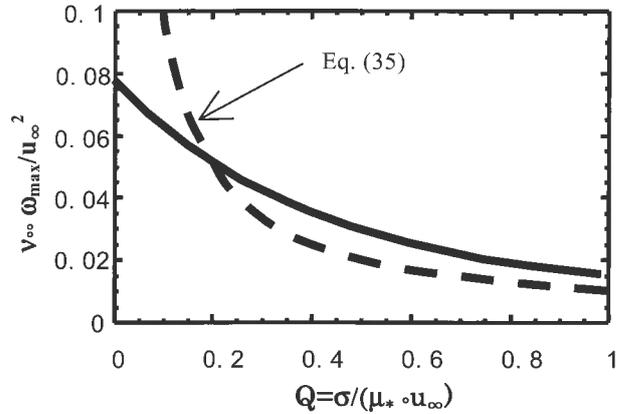
$$A_s = \frac{k\rho_{s\infty}(-c)^2 \Delta}{1 - \frac{k}{\sqrt{k^2 + \frac{ik\rho_{s\infty}(-c)}{\mu_{s\infty}}}}} \quad (42)$$

を得るので, 粘性を考慮したときの分散関係式は

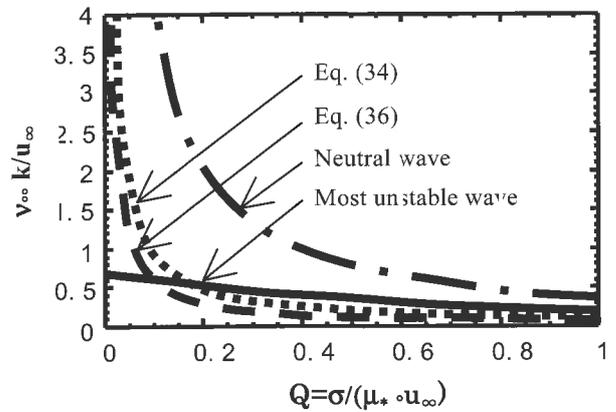
$$\frac{\rho_{s\infty}(-c)^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i\rho_{s\infty}(-c)}{k\mu_{s\infty}}}}} + \frac{\rho_\infty(u_\infty - c)^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i\rho_\infty(u_\infty - c)}{k\mu_\infty}}}} = k\sigma \quad (43)$$

となる. この式によれば, 小さな波数での解  $c$  は非粘性解に一致するが, 大きな波数では

$$c = \frac{\mu_\infty}{\mu_{s\infty} + \mu_\infty} \mu_\infty - i \frac{\sigma}{2(\mu_{s\infty} + \mu_\infty)} \quad (44)$$



(a) Maximum growth rate



(b) Wave numbers of most unstable and neutral waves

Fig. 5 Dependence of maximum growth rate and wave number on surface tension.

となるから, 波数に比例して減衰率が大きくなることからわかる. 密度比  $\rho_\infty / \rho_{s\infty} = 0.1$ , 動粘性係数比  $\nu_\infty / \nu_{s\infty} = 10$  の場合を例に取って, パラメータ  $Q = \sigma / (\mu_{s\infty} u_\infty)$  に対する最も不安定な波の増幅率と波数および中立波の波数の依存性を式 (43) に基づいて計算した結果を図 5 に示す. 増幅率  $\omega$  と波数  $k$  は  $\nu_\infty \omega / u_\infty^2$  と  $\nu_\infty k / u_\infty$  によって無次元化してある. 図には比較のために非粘性解のグラフも描いてある. 図 5(a) の実線は粘性解, 破線は非粘性解 (35) を表す. また, 図 5(b) では, 粘性を考慮したときの最も不安定な波の波数と中立波の波数をそれぞれ実線および一点鎖線で描いてある. 対応する非粘性解のグラフは破線と点線で描いてある. 増幅率と波数が  $Q$  (表面張力) の単調減少関数になっている点は, 粘性解でも非粘性解でも変わらない. しかし, 両解の間に定量的に有意な差がある. 注目すべきは,  $Q = 0$  の極限で, 粘性を考えたとき, 最も不安定な波の増幅率と波数が有限値に抑えられている点である. しかし, 比較的大きな  $Q$  の値 (表面張力が大きい) のところを見ると, 最大増幅率と中立波の波数が非粘性値より大きくなっており, 粘性は常に乱れを抑える方向にだけ作用するのではないことが知れる. 表面張力が大きくなると, 表面の変形が抑え

られる。このため、気液密度比が小さいときには、表面速度が零に近づき、液体は気体に対して剛体的に振る舞うようになる。このときの流れの不安定性は固体表面に沿って流れる気体の流れ(ブラジウスの流れ[8])に生じる不安定性に似たものになるであろう。ブラジウスの流れでは剪断層厚みに基づいて作ったレイノルズ数がある値を超えると、粘性によって不安定性が生じることが知られている。本解析ではオーア・ゾンマーフェルト方程式[8]は解いていないが、剪断層の外側の領域ではブラジウスの流れに対するものと基本的に同じ解の形を取るはずである。換言すれば、ブラジウスの流れの不安定性は、剪断層の外側の擾乱流での粘性の効きによって作られていることがわかり、本解析で、同様の効果をもっと小さなレイノルズ数で現れるのは、表面の変形が許されているからであると考えられる(後の図6参照)。

2.1.2. 解の存在性

ここで注意しなければいけないのは、式(35)で記述されるテラーの不安定性を持つ流れの存在性はまだ示されていない点である。外部解との接続条件を満たす内部解  $u'$  の存在を示して、はじめて、テラーの解の存在が保証されたことになり、この点の検討がまだ残っている。実は、これまで看過されてきた事柄であるが、解の存在性を調べることによって、テラーの理論が成立するためのもう一つの条件があきらかになる。実際、従来の論文によれば、テラーの不安定性はレイノルズ数が大きい程現れやすいような印象を与える記述になっているが、それは間違いであると知れる。

解析を正確に行うためには、無次元化した式によって考えた方がよい。外部解と接合し、且つ、境界層の特性をうまく表すように変数を無次元化する。それには、

$$\xi = \ell \hat{\xi}, \quad \eta = \delta \hat{\eta}, \quad t = (\ell / u_\infty) \hat{t} \tag{45}$$

$$u' = (\Delta / \ell) u_\infty \hat{u}', \quad v' = (\Delta / \ell) u_\infty \hat{v}', \quad p = \rho_\infty u_\infty^2 (\Delta / \ell) \hat{p}' \tag{46}$$

と置けばよい。

$u'$  を求めるには  $p'$  と  $v'$  に関して高次の項まで考えなければいけない。式(15)を導いたのと同じ計算より

$$P = P_0 + \frac{\delta}{\ell} k^2 \Delta_0 \int_0^{\hat{\eta}} (\hat{u}_0 - \hat{c})^2 d\hat{\eta} + \frac{1}{\text{Re}} ik \Delta_0 \left[ \frac{d\hat{u}_0}{d\hat{\eta}} - \frac{d\hat{u}_0}{d\hat{\eta}}(0) \right] \tag{47}$$

を得る。右辺第1項は第零近似解に一致する。この式から、 $\delta / \ell$  と  $1/\text{Re}$  の大小関係によって、高次の項の展開式が変化することがわかる。3つの場合

$$(i) \frac{\delta}{\ell} < \frac{1}{\text{Re}}, \quad (ii) \frac{\delta}{\ell} > \frac{1}{\text{Re}}, \quad (iii) \frac{\delta}{\ell} \sim \frac{1}{\text{Re}}$$

が考えられる。

(i) および (ii) の場合の展開式は、それぞれ、微小パラメ

ター ( $\delta / \ell$ ) および ( $1/\text{Re}$ ) を展開パラメータとしてオーダリングされることになる。外部解において、粘性項の寄与が効いてくるのは  $O((\delta / \ell)(1/\text{Re}))$  においてであるから、線形近似の範囲 ( $\delta / \ell \gg (\Delta / \ell)^2$ ) に留まっている限り、外部解は、いずれの展開に対しても解の形が式(25)–(27)とかわらない。ただ、 $c$  と係数  $A, A^*$  がこれらの微小パラメータを用いて展開された形になる点だけが異なる。例えば、 $P = A \exp(-k\eta)$  はパラメータ  $\delta / \ell$  を用いて

$$P \rightarrow \left[ A_0 + \frac{\delta}{\ell} A_1 + \left[ 1 - \frac{\delta}{\ell} k \hat{\eta} + \right] \left( \frac{\delta}{\ell} \rightarrow 0 \right) \right] \tag{48}$$

と展開される。

解の存在性を示すには、(i)–(iii) のそれぞれの場合に対して、内部解を求め、式(48)の例示の展開に注意して外部解と接合する内部解の存在を調べて行けばよい。ここでは、(iii) の場合を取り上げて説明する。同様の計算により、他の場合には接合解が存在しないことがわかる。 $\text{Re}$  の値が十分小さいときには、ここで仮定している条件  $(\delta / \ell)(1/\text{Re}) \ll 1$  が破綻するので、(i) の場合の解の非存在性は実際には意味がなく、結局、テラーの解は  $(\delta / \ell) \leq (1/\text{Re})$  の条件において成立することが知れる。

気相側の剪断層内の解を

$$Y = Y_0 + \frac{\delta}{\ell} Y_1 + \tag{49}$$

$$\hat{v}' = \hat{v}'_0 + \frac{\delta}{\ell} \hat{v}'_1 + \quad \hat{u}' = \hat{u}'_0 + \frac{\delta}{\ell} \hat{u}'_1 + \tag{50}$$

$$\hat{p}' = \hat{p}'_0 + \frac{\delta}{\ell} \hat{p}'_1 + \tag{51}$$

と展開する。式(26)の第零近似式より

$$\hat{v}'_1 - \frac{\partial \hat{Y}_1}{\partial \hat{t}} - \hat{u}_0 \frac{\partial \hat{Y}_1}{\partial \hat{\xi}} = - \frac{\frac{\partial \hat{u}'_0}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_0 \frac{\partial \hat{u}'_0}{\partial \hat{\xi}} + \frac{\partial \hat{p}'_0}{\partial \hat{\xi}} - \frac{\ell}{\text{Re} \delta} \frac{\partial^2 \hat{u}'_0}{\partial \hat{\eta}^2}}{\frac{d\hat{u}'_0}{d\hat{\eta}}} \tag{52}$$

を得る。この式と連続の式

$$\frac{\partial \hat{u}'_0}{\partial \hat{\xi}} - \frac{\partial \hat{Y}_1}{\partial \hat{\xi}} \frac{\partial \hat{u}'_0}{\partial \hat{\eta}} + \frac{\partial \hat{v}'_0}{\partial \hat{\eta}} = 0 \tag{53}$$

から  $\hat{v}'_1$  を消去して  $\hat{u}'_0$  に対する方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\eta}} \left[ \frac{\partial \hat{u}'_0}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_0 \frac{\partial \hat{u}'_0}{\partial \hat{\xi}} + \frac{\partial \hat{p}'_0}{\partial \hat{\xi}} - \frac{\ell}{\text{Re} \delta} \frac{\partial^2 \hat{u}'_0}{\partial \hat{\eta}^2} \right] - \left[ \frac{\partial \hat{u}'_0}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_0 \frac{\partial \hat{u}'_0}{\partial \hat{\xi}} + \frac{\partial \hat{p}'_0}{\partial \hat{\xi}} - \frac{\ell}{\text{Re} \delta} \frac{\partial^2 \hat{u}'_0}{\partial \hat{\eta}^2} \right] \frac{d^2 \hat{u}'_0}{d\hat{\eta}^2} - \frac{\partial \hat{u}'_0}{\partial \hat{\xi}} \frac{d\hat{u}'_0}{d\hat{\eta}} = 0 \tag{54}$$

ここで  $\hat{u}'_0 = F(\hat{\eta})e^{ik(\frac{z}{\ell} - it)}$  と置いて、振幅  $F$  に対する方程式に書き換えると

$$i\hat{k}(\hat{u}_0 - \hat{c})\frac{dF}{d\hat{\eta}} - \frac{\ell}{\text{Re}\delta}\frac{d^3F}{d\hat{\eta}^3} - \left[ i\hat{k}(\hat{u}_0 - \hat{c})F + i\hat{k}P_0 - \frac{\ell}{\text{Re}\delta}\frac{d^2F}{d\hat{\eta}^2} \right] \frac{d^2\hat{u}'_0}{d\hat{\eta}^2} - i\hat{k}F\frac{d\hat{u}'_0}{d\hat{\eta}} = 0 \quad (55)$$

となる。

この方程式の解を求めるために、まず  $\hat{\eta} \rightarrow \infty$  の漸近解を考える。その解は容易に求まり、

$$F = B \exp\left[-\sqrt{\frac{\text{Re}\delta}{\ell}} i\hat{k}(1-\hat{c})\hat{\eta}\right] + C \exp\left[+\sqrt{\frac{\text{Re}\delta}{\ell}} i\hat{k}(1-\hat{c})\hat{\eta}\right] + \frac{D}{2\sqrt{\frac{\text{Re}\delta}{\ell}} i\hat{k}(1-\hat{c})} \left[ \exp\left[+\sqrt{\frac{\text{Re}\delta}{\ell}} i\hat{k}(1-\hat{c})\hat{\eta}\right] \int_0^{\hat{\eta}} \frac{d\hat{u}'_0}{d\hat{\eta}} \exp\left[-\sqrt{\frac{\text{Re}\delta}{\ell}} i\hat{k}(1-\hat{c})\hat{\eta}\right] d\hat{\eta} - \exp\left[-\sqrt{\frac{\text{Re}\delta}{\ell}} i\hat{k}(1-\hat{c})\hat{\eta}\right] \int_0^{\hat{\eta}} \frac{d\hat{u}'_0}{d\hat{\eta}} \exp\left[+\sqrt{\frac{\text{Re}\delta}{\ell}} i\hat{k}(1-\hat{c})\hat{\eta}\right] d\hat{\eta} \right] - \frac{P_0}{1-\hat{c}} \quad (56)$$

となる。この解は係数  $C$  の値を適当に選ぶことによって外部解と自動的に接合する。この漸近解を参考にして、

$$f(\hat{\eta} \rightarrow \infty) = \exp\left[-\sqrt{\frac{\text{Re}\delta}{\ell}} i\hat{k}(1-\hat{c})\hat{\eta}\right] \quad (57)$$

$$g(\hat{\eta} \rightarrow \infty) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\text{Re}\delta}{\ell}} i\hat{k}(1-\hat{c})} \left[ \exp\left[+\sqrt{\frac{\text{Re}\delta}{\ell}} i\hat{k}(1-\hat{c})\hat{\eta}\right] \int_0^{\hat{\eta}} \frac{d\hat{U}}{d\hat{\eta}} \exp\left[-\sqrt{\frac{\text{Re}\delta}{\ell}} i\hat{k}(1-\hat{c})\hat{\eta}\right] d\hat{\eta} - \exp\left[-\sqrt{\frac{\text{Re}\delta}{\ell}} i\hat{k}(1-\hat{c})\hat{\eta}\right] \int_0^{\hat{\eta}} \frac{d\hat{U}}{d\hat{\eta}} \exp\left[+\sqrt{\frac{\text{Re}\delta}{\ell}} i\hat{k}(1-\hat{c})\hat{\eta}\right] d\hat{\eta} \right] \quad (58)$$

$$h(\hat{\eta} \rightarrow \infty) = -\frac{P_0}{1-\hat{c}} \quad (59)$$

を満たすように元の方程式 (55) を数値的に解いて解  $f, g, h$  を定めると、方程式 (55) の一般解は

$$F = Bf + Dg + h \quad (60)$$

となる。この解が外部解と接合するためには、発散解が存在してはならず、 $C=D=0$  でなければいけない。接合条件

$$F(\infty) = -\frac{P_0}{1-\hat{c}_0} = \hat{k}(1-\hat{c}_0)\hat{\Delta}_0 \quad (61)$$

$$F_0(-\infty) = -\frac{P_{*0}}{-\hat{c}_0} = \hat{k}\hat{c}_0\hat{\Delta}_0 \quad (62)$$

は自動的に満たされる。液相に対しても同様の式が導かれ、界面条件

$$Bf(0) + h(0) = B_*f_*(0) + h_*(0) \quad (63)$$

$$u_{\infty}[Bf'(0) + h'(0)] = u_{\infty}[B_*f'_*(0) + h'_*(0)] \quad (64)$$

より係数  $B$  と  $B_*$  の値が確定するので、確かに、所与の  $\hat{c}_0$  に対して、解  $\hat{u}'_0$  が存在することが示せた。

### 2. 1. 3. テーラーの解の成立条件

式 (56) より  $k\delta(1-c)$  の実部の値が  $2(2\pi)^2$  より大きいときには、擾乱量が剪断層内で周期的に変動するようになることがわかる。しかし、このような振動解は、擾乱波の波長が剪断層厚みに比べて十分大きいとしている仮定に反するので、(ii) の場合にはテーラー解が存在しないことを意味する。すなわち、テーラーの解は境界層が非常に薄いことを条件にして成立し、非粘性解析から求まる解であるにもかかわらず、剪断層厚みに基づいて作ったレイノルズ数が比較的小さな値を取るときに現れる不安定性であることが知れる。この点で、噴射液の境界層が厚くなり、レイノルズ数がある値より大きくなると現れる流体力学的不安定性とは明確に異なった特性を持っている。

計算法の詳細は省略するが、上で述べた事柄を確認するために、考えている基礎流の線形安定性を数値的に調べた。蒸発の影響を取り除くために、基礎流の気液相としては、相平衡状態にある単一物質の気相と液相を取った。従って、圧力を指定すれば、流体計算に必要な物性値 (密度、粘度、表面張力) は全て決まる。基礎流の計算では、気液相のそれぞれにおいてプラジウスの速度分布が成り立つと仮定し、界面での速度と剪断応力の連続性より界面速度を決定した。気液相の擾乱流に対する支配方程式はオーア・ゾンマーフェルト方程式である。これに、無限遠で擾乱が消失する条件と、変形した界面上で満たされるべき条件の線形近似式を適用して、複素位相速度  $c$  に対する固有値問題が構成される。この方程式系は、プラジウスの流れの線形安定性を数値的に解いたオズボーンの方法[9]に多少の工夫を施して解くことができる。図 6 に算出された中立安定曲線

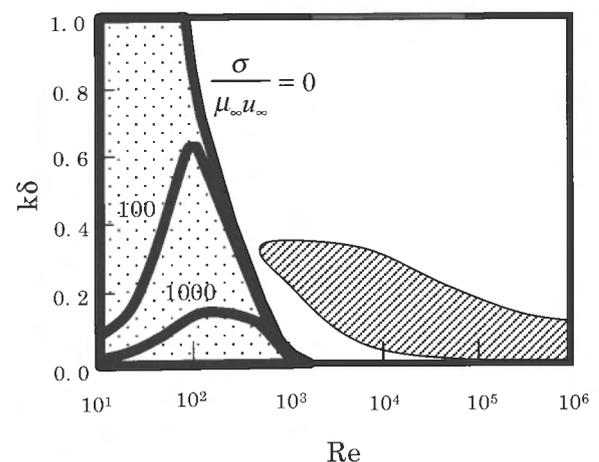


Fig. 6 Regions of instabilities associated with liquid surface.

を示す。計算は標準状態の水を対象にして行った。液体の密度と粘性係数が気体に比べて非常に大きいので、レイノルズ数が大きいときには、液相は気相に対して剛体的に挙動する。そのため、固体壁上の気体流れと同様に、粘性による不安定性が520より大きなレイノルズ数で発生する(図6の斜線領域)。同時に、特ロー型の不安定性を表す解(図6の玉模様の領域、斜線の領域と違ってパラメータ  $\sigma/\mu_\infty u_\infty$  の値によって境界線が変化する)も現れるが、その範囲はブラジウス流の不安定性が現れるレイノルズ数より小さなところに限られている。しかも、特ロー型不安定性領域の境界はレイノルズ数に比例する線と反比例する線から成り立っていて、上で明らかにした知見に一致している。すなわち、特ローの不安定性が現れる気相剪断層厚みで無次元化した波数は、式(34)、すなわち、

$$k\delta < \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + \rho_\infty} \frac{\mu_\infty u_\infty}{\sigma} \text{Re} \quad (65)$$

と条件

$$k\delta < \frac{2(2\pi)^2}{\text{Re}} \quad (66)$$

によって制限される。不思議ではあるが、このような基礎的な事項が、過去の微粒化研究ではよく理解されてこなかった。重要な事柄として、表面張力が小さくなると、式(36)で予測される最も不安定な波では、式(66)の条件も破綻することに注意しよう。

## 2.2. 液柱の不安定性の解析

特ローの理論は剪断層の効果を気液界面位置での境界条件に置き換えて表現するので、剪断層が薄ければ、静止気体中に噴射された液柱に対しても、その考え方がそのまま適用できる。違いは、外部解の違いから生じる。前節の平面問題では、外部解領域は無限に広がっており、表面から遠く離れた位置で不安定波が減衰するとした。遠くまで表面の影響が伝わる長波長の特ロー不安定波の存在は、液相の外部解領域が有限な場合には、その領域を横断して表面の変形が互いに影響し合うことを意味する。従って、円形ジェットでは、剪断層の両側の気液相の外部解領域において曲率の影響の入った非粘性流を解く必要がある。また、液柱の断面が円形であることより、解の中にはレーリーの不安定性が自然に入ってくることになる。以下、我々にとって興味がある高圧下の噴射液柱に対して、特ローの理論の適用を考えていこう。

改めて問題を設定する。対象は、静止気体中に噴射した半径  $a$  の円柱状の液体である。液柱に乗って観察すれば、周囲の気体は噴射速度と逆向きに軸方向に流れていることになる。この液柱の不安定性を調べるには、スクワイアの定理[10]によって軸対称な擾乱を考えれば十分である。そこで、液柱の中心軸に沿って円筒座標の  $x$  軸を取り、因子  $\exp[ik(x-ct)]$  を持った擾乱波を考える。表面の変位量を  $Y$

( $t, x$ ) として、表面近くの流れを考えるときには、動径座標  $r$  の代わりに式  $r-a=Y+\eta$  によって定義される座標  $\eta$  を用いる。

近臨界表面状態では、拡散係数が動粘性係数より小さくなるので、噴射液の蒸発によって生じる濃度境界層は剪断層より薄くなる。すなわち、気相および液相側の濃度境界層の厚みをそれぞれ  $\varepsilon$  および  $\varepsilon_s$  とすると、剪断層内の  $-\delta_s < -\varepsilon_s < \eta < \varepsilon < \delta$  の領域において燃料の濃度が急激に変化しており、この濃度変化によって生じる密度変化を考慮しなければいけない点が低圧の場合と異なる[11]。前節と同様、軸方向と半径方向の速度成分を  $u=u_0(\eta)+u'$ ,  $v=v'$ , また、 $\xi=x$  と置く。

剪断層が薄く、その内の流れにおいて、液柱の曲率の影響が無視できれば、

$$v'(\eta=\delta)-v'(\eta=\varepsilon)=\frac{\partial Y}{\partial \xi}[u_0(\eta=\delta)-u_0(\eta=\varepsilon)] \quad (67)$$

が成り立つ。濃度境界層内の擾乱流に対する連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}-\frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial \eta}+\frac{\partial}{\partial \xi} \rho u-\frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \rho u+\frac{\partial}{\partial \eta} \rho v=0 \quad (68)$$

となる。これを気相側の濃度境界層にわたって積分すると、

$$\left[\rho v-\frac{\partial Y}{\partial t} \rho-\frac{\partial Y}{\partial \xi} \rho u\right]_0^\varepsilon+\int_0^\varepsilon\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi} \rho u\right] d \eta=0 \quad (69)$$

となるから、微小な  $\varepsilon$  に対しては

$$\rho_\infty v(\eta=\varepsilon)-\frac{\partial Y}{\partial t} \rho_\infty-\frac{\partial Y}{\partial \xi} \rho_\infty u(\eta=\varepsilon)=\rho_s v(\eta=0)-\frac{\partial Y}{\partial t} \rho_s-\frac{\partial Y}{\partial \xi} \rho_s u_s \quad (70)$$

を得る。ここで、式(67)と液面での質量保存関係式(蒸発速度が小さく、その寄与は無視できるとするので  $(v(\eta=0)=v_s(\eta=0)=dY/dt)$  の条件を適用すると、

$$v'(\eta=\delta)=\frac{\partial Y}{\partial t}+u(\eta=\delta) \frac{\partial Y}{\partial \xi} \quad (71)$$

となる。液相に対しても

$$v_s(\eta=-\delta_s)=\frac{\partial Y}{\partial t}+u_s(\eta=-\delta_s) \frac{\partial Y}{\partial \xi} \quad (72)$$

を得るから、式(13)および(14)と全く同じ関係式を得る。すなわち、剪断層内の密度変化は特ローの不安定性に本質的な影響を与えないことがわかる。特ローの理論の成立条件を含めて、内部解では、液面での力学条件

$$\left[p'_s\right]_{\eta=-\delta_s}-\left[p'\right]_{\eta=\delta}=-\sigma\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2}+\frac{Y}{a^2}\right) \quad (73)$$

を除いて他に変更点はない。式 (73) の右辺第 2 項は円周方向の表面張力による絞りの効果を表す。この項の存在によって、以下に求める解はレーリーの不安定性を内包することになる。円形液体ジェットに対するテーラーの理論の適用結果がレーリー・テーラーの理論と呼ばれている所以である。

剪断層の外側では密度が一様である。圧力はラプラスの方程式を満たすから、気液相の擾乱圧力の複素振幅は、第 2 種の修正されたベッセル関数  $K_0(kr)$  と  $I_0(kr)$  を用いて、それぞれ  $P=AK_0$  および  $P_s=A_sI_0$  によって与えられる。従って、擾乱速度 ( $u', v'$ ) の複素振幅 ( $U, V$ ) は、運動方程式

$$\rho_\infty ik(u_\infty - c)V = -\frac{dP}{dr} = AkK_1 \quad (74)$$

$$\rho_\infty ik(u_\infty - c)U = -ikP = -ikAK_0 \quad (75)$$

より直ちに定まる。式 (75) を剪断層外縁で評価した式に界面の運動学条件 (72), すなわち,  $V = ik(u_\infty - c)\Delta$  を適用して

$$-\rho_\infty k^2(u_\infty - c)^2 \Delta = AkK_1(ka) \quad (76)$$

を得る。よって、

$$P(\eta = \varepsilon) = P(\eta = \delta) = AK_0(ka) = -\rho_\infty k(u_\infty - c)^2 \frac{K_0(ka)}{K_1(ka)} \Delta \quad (77)$$

同様にして、液相解より

$$\rho_\infty k^2(-c)^2 \Delta = A_s k I_1(ka) \quad (78)$$

$$P(\eta = -\varepsilon_s) = P(\eta = -\delta_s) = A_s I_0(ka) = \rho_\infty k(-c)^2 \frac{I_0(ka)}{I_1(ka)} \Delta \quad (79)$$

を得るので、これらを力学条件式 (74) に代入すると、 $c$  に対する方程式が得られる。

$$\frac{I_0(ka)}{I_1(ka)} \rho_\infty k(-c)^2 + \frac{K_0(ka)}{K_1(ka)} \rho_\infty k(u_\infty - c)^2 = -\sigma \left( -k^2 + \frac{1}{a^2} \right) \quad (80)$$

$c$  について解いて増幅率を求めると

$$\omega = \frac{u_\infty k \sqrt{\frac{I_0 K_0 \rho_\infty}{I_1 K_1 \rho_\infty} + \left[ \frac{I_0}{I_1} + \frac{K_0}{K_1} \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty} \right] \frac{\sigma}{\rho_\infty u_\infty^2 a} \left( \frac{1}{ka} - ka \right)}}{\frac{I_0}{I_1} + \frac{K_0}{K_1} \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty}} \quad (81)$$

となる。

図 7 に、密度比  $\rho_\infty / \rho_{s_\infty} = 0.05$  として式 (81) から計算した不安定波の存在域を玉模様で示す。図には、参考のため、各液体ウェーバー数で実現される最も不安定な波の増幅率 (太破線) と波長 (太実線) も図示してある。噴射液と雰囲気との速度差が小さいとき (ウェーバー数が小さいとき) に現れる不安定性はレーリーの不安定性である。ウェーバー数が大きくなると、波長の短い不安定波が現れるようになり、増幅率が急速に増大していく。注意しなければいけないのは、軸対称な不安定波の励起によって、噴射液が周期的に括れて分断し、液滴が作られるためには、取りうる波長に下限があることである (図の斜線部では噴射液の分断が起きない)。実際、波長 ( $2\pi/k$ ) の間隔で液柱が分断して、切片が表面張力によって球形に丸まるとしよう。切片の変形が等体積的に起きれば、球の半径  $a$  は  $\pi a^2 (2\pi/k) = (4\pi/3)a^3$  を満たす。しかし、この式から算出される球の直径 ( $2a$ ) の値が分断間隔 ( $2\pi/k$ ) よりも小さくなるようであれば、すなわち、 $2\pi/k < \sqrt{6}a$  を満たす波数  $k$  に対しては、切片が丸まる途中で隣の切片にくっついて合体するので、液柱の分断が起きることはない。ウェーバー数が大きいときの不安定

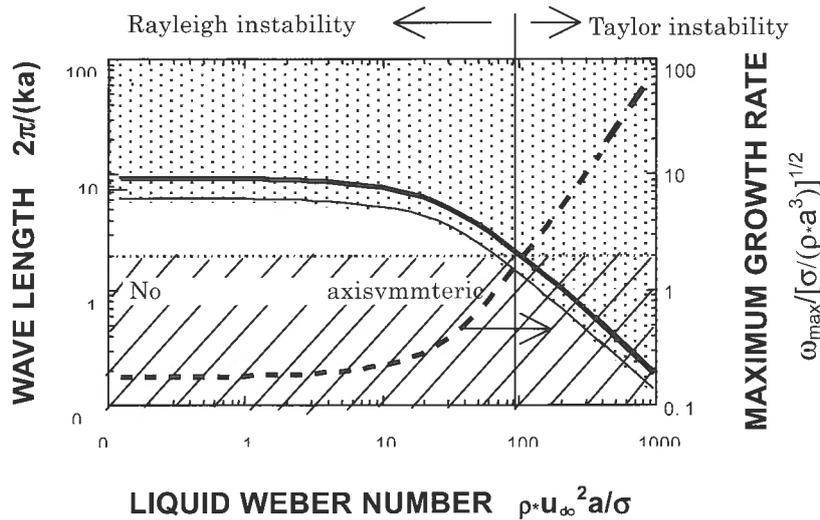


Fig. 7 Instability region

波の波長は、この限界値より小さくなることより、噴射液の表面の変形 (前節で取り扱った狭義のテラーの不安定性) を記述し、後続の非線形的な流体力学的な発展によって液糸が形成されると考えられる。

式 (81) より不安定波の増幅率が  $u_{\infty}/a$  でスケールされることがわかる。従って、 $u_{\infty}/a$  で無次元化された増幅率は液体ウェーバー数と気液密度比の関数になる。この意味を、噴射液において不安定性が顕現する位置との関係で見ると、次の事柄が言える。いま、ノズルから噴射された液体に乗って観察すると、足下の液体の表面の変形は時間の経過と共に指数関数的に増大する。指数  $\omega t$  の値がある値  $E$  に達する時刻をもって不安定波の顕現時間を定義すると、不安定波が顕現するまでに移動する距離  $x$  は  $(\omega x/u_{\infty})(x/a)=E$  を満たす。これより、顕現距離をノズル半径で割った値は無次元増幅率の逆数に比例し、液体ウェーバー数が等しければ、同じ値を取る。すなわち、表面張力が小さな値を取る高圧では、小さな噴射速度でも、低圧時の高速噴射と同じテラーの不安定性 (幾何学的に同じ、流量などの速度は異なる!) を観察することができることになる。図 2 の近臨界混合表面液ジェットの実験は、この理屈に従って、高ウェーバー数の現象を低速度で生起させて観察しているものである。

2.3. 実験で観察されたテラー型不安定性の消失の意味

以上、静止気体中に噴射された液体ジェットに現れるテラーの不安定性について詳しく調べてきたが、序論で述べたような、ある圧力を境にして突然テラーの不安定性が消失する現象を説明する特性をテラーの不安定性の増幅率において見つけることはできない。このことより、高圧でのテラーの不安定性の消失は、高圧化に伴うテラーの不安定性の強度 (増幅率) の変化によって起きるのではなく、むしろ、ある条件になるとテラーの不安定性そのものが発生できなくなると考えるべきである。そこで、以下では、テラーの不安定性の発生機構について考察する。この考察により、これまで未解決であった他の幾つかの問題も解決する新しい概念が生まれてくる。

テラーの不安定性にとって気液界面の存在は絶対的である。このことは、液相の流体を気相の流体と同じ流体に置き換えて、表面張力が働かないようにしたときの解を考えればわかる。この場合の基礎流は、単一の流体が作る自由剪断層流れになる。流れの対称性より、独立な不安定波は、擾乱圧力の振幅が  $y=0$  に関して対称になるモードと、歪対称になるモードの 2 つが考えられる。原点に乗って観察したときのそれぞれのモードの流線と擾乱圧力分布の概略を図 8 に示す。濃い玉模様の領域は擾乱圧力が正になる部分を表し、薄い玉模様の領域は擾乱圧力が負になる部分を表す。テラーの不安定性は歪対称モードの不安定波によって与えられるが、良く知られているように、自由剪断層流れの線形安定性解析によれば、対称モードの不安定波 (図 8(a)) しか存在しない。この矛盾が生じたのは、テラー

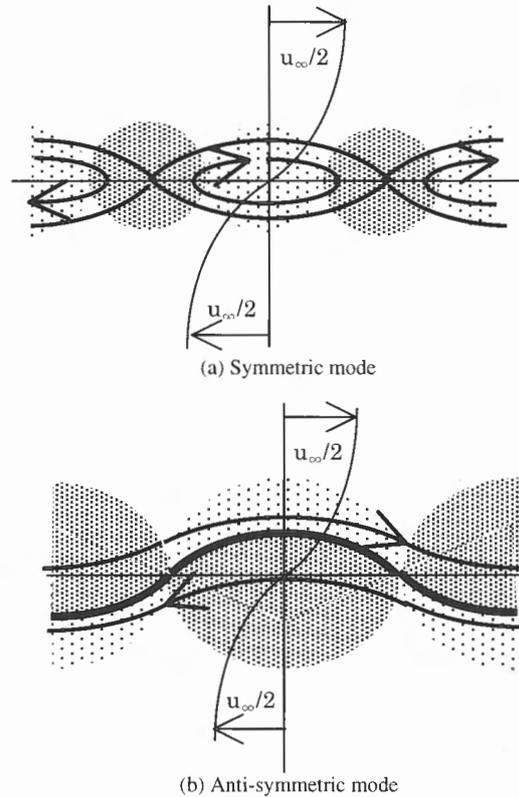


Fig. 8 Pressure and streamline patterns in the two independent modes of free shear layer flow instability.

の解析では流体を二分する正弦波状の界面  $y=Y(t, x)$  が存在し、それが常に流線に一致していることが要求されているのに対して、現実の自由剪断層流れではそうならないからである。実際、自由剪断層流れでは、ある時刻に正弦曲線  $y=Y(t, x)$  の上にあつた流体粒子は別の時刻では、その曲線から離れた位置に移っているのが一般的である。すなわち、テラーの解は、流体を仕切る界面が存在して、それが力学的に意味を持つ場合においてのみ有効であることがわかる。

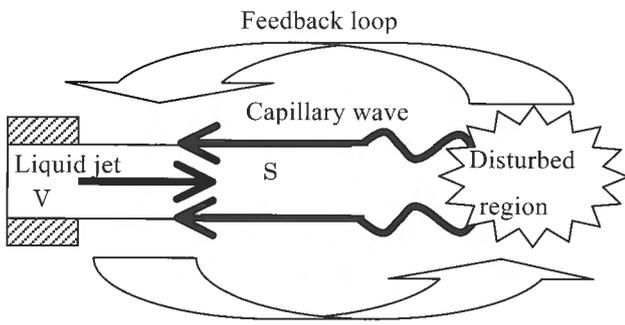
さらに、界面が固体表面のように変形しない場合にも、式 (13) は意味を持たなくなるから、界面はそれ自身で波動的に変形する特性を持っていなければならないことが知れる。この点で、気液界面に働く表面張力の存在は、気相と液相に流れがなくても位相速度  $c = \pm \sqrt{\sigma k / (\rho_* + \rho)}$  で伝播する液面の波動を生む。(粘性を考慮したときの表面張力波の位相速度は、式 (42) で  $u_{\infty}=0$  と置いて計算できる。その結果によれば、表面張力波の波数  $k$  が大きいときには、位相速度が零で、減衰率が  $\sigma k / (\mu_{\infty} + \mu_{*}) / 2$  の減衰波になる。逆に、波数が小さいときは、近似的に

$$c = \pm \left[ \frac{k\sigma}{\sqrt{\rho_{*_{\infty}} + \rho_{\infty}}} - \frac{\sqrt{\rho_{*_{\infty}}\mu_{*_{\infty}} + \rho_{\infty}\mu_{\infty}}}{2\sqrt{2}(\rho_{*_{\infty}} + \rho_{\infty})} \right] \sqrt{\frac{k^3\sigma}{\rho_{*_{\infty}} + \rho_{\infty}}} - i \frac{\sqrt{\rho_{*_{\infty}}\mu_{*_{\infty}} + \rho_{\infty}\mu_{\infty}}}{2\sqrt{2}(\rho_{*_{\infty}} + \rho_{\infty})} \sqrt{\frac{k^3\sigma}{\rho_{*_{\infty}} + \rho_{\infty}}} \quad (82)$$

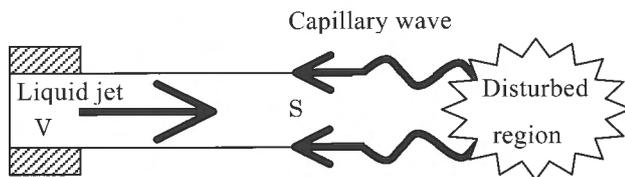
と表せる。よって、これらの計算結果から、表面張力が小さいときには、波数の小さな波だけが有効に伝播し、伝播速度は小さな値を取ることが知れる。) 従って、液相と気相の間に速度差のあるところに表面張力波が伝わってくると、図4に示す状態になり、界面を横断してベルヌーイの定理に従う力が出現して、表面波が不安定化する。テーラーの不安定性は、このようにして発生するものと理解され、高圧化によって表面張力が小さくなると、液面の変形を隣に伝える波の速度が小さくなることより、テーラーの不安

定性が励起されにくくなることがわかる。

この知見を念頭において、次に実験で調べた噴射液の挙動を考えよう。本論文で取り扱った線形安定性解析は時間発展型のモデルに拠っているが、実際の噴流で考えれば、下流からの擾乱のフィードバックがなければ継続的な不安定性は生じない(図9(a)). このことは、線形安定性解析によって得られる不安定波の初期振幅に不安定性があることからわかる。外からの擾乱によって大きな初期振幅が与えられれば、より短時間で不安定波が成長する。擾乱のフィードバックのルートには幾つかある。自由剪断層流れでは、気相の乱れの上流への伝播が主なルートになるが、気体と液体の密度差が大きいときには、気相の弱い乱れが液面の変形を起こすことは難しい(有意な液面変形を起こすには時間がかかり、その間に噴射液は遠くまで移動してしまう)。液体を通して擾乱が上流に伝播するときには、必ず表面変形を伴うから、この擾乱の伝播形式は表面張力波の伝播と同じである。下流での噴流の乱れによって表面波が作られると、それが上流に伝わっていく。粘性の効果を考慮に入れると、波数が高く早く伝播する波はすぐ減衰するから、有効に上流に伝わっていく表面張力波は波数が比較的小さなものである。そして、表面張力が小さいと、伝播速度も小さくなる。このため、上流に伝播する表面張力波の伝播速度が液体の噴射速度より小さければ、擾乱は上流に伝播できず、不安定性を励起できなくなる(図9(b)). これが序論で述べた実験におけるテーラーの不安定性の消失の理由であると考えられる。圧力を上げていったときに見られる突然の変化は、表面張力波から見たときの噴流の超音速状態への変化として理解できる。



(a) Jet speed subsonic relative to capillary waves



(b) Jet speed supersonic relative to capillary waves

Fig. 9 Emergence of Taylor instability.

2.4. 応用的推論

前節で得た知識を応用して、下記の推論ができる。

本論文で示したように、テーラーの不安定性は表面張力以外には液面の特性に依存しない。このことより、表面張力が大きな値を取る低圧条件においても、表面張力波の伝播速度を上回る速度で液体を噴射したときには、テーラーの不安定性が現れないと考えられる。例えば、常圧での水の実験を考えた場合、噴射器内の流れの乱流化やキャビテーションの発生によって、内部乱れを持たない高速噴射液ジェットを作ることは難しい。噴射液が乱れを持っていれば、それによって表面が変形し液糸が作られるので、短い距離での乱流微粒化が可能である。しかし、広安ら[12]は、ノズル壁全体をキャビティーで包ませることによって乱れを持たない高速噴射液ジェットを実現し、微粒化位置が大幅に下流に移るのを観察しているが、この現象が起きた理由は噴射速度の増大によってテーラーの不安定性の発生が抑えられたためと思われる。序論で述べた近臨界混合表面液ジェットの実験結果は、表面張力の値を小さくして、これと同等の現象を観察したものだと言える。また、従来の実験で噴射速度を変えたときの微粒化距離にヒステリシス現象が現れることが報告されてきているが、この現象も上で

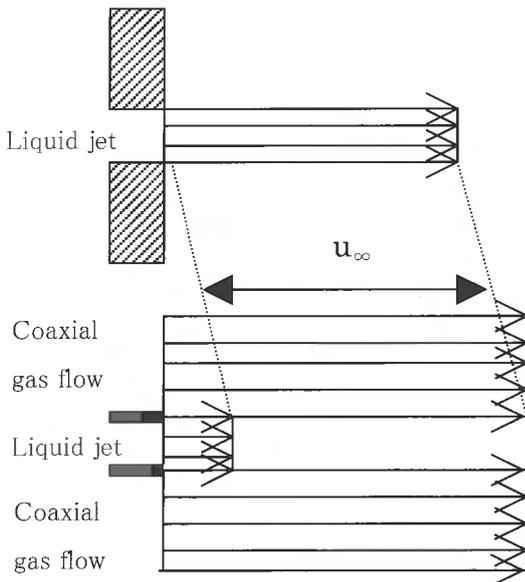


Fig.10 Conjugate flow configuration.

述べた擾乱部からの表面張力波がテローの不安定性の励起に果たしている役割を考えれば自然に理解できる事柄である。

テローの不安定性の強度を決めるのは、気液相の相対速度の大きさであるので、気液相の速度段差が同じであれば、静止気体中に液体を噴射したときも、低速噴射液に沿って高速ガスを流しているときも、同じ不安定性強度を示すことになる(図 10)。しかし、後者の場合の方が良い微粒化特性を示すことが経験的に分かっており、ツウィンアトマイザーとして使われている。この違いも、表面張力波が不安定性の励起に関係するとすれば理論的に説明できる。噴射液の表面速度は噴射速度に近い値を取るため、高速で液体を噴射したときには表面張力波が上流に伝播することができず、不安定化する位置が下流に流される。他方、同軸の高速ガス流中で液体を低速噴射するときには、表面張力波がノズルまで達することができ、気体との大きな速度差によって、ノズル出口近くから微粒化が起きるようになるであろう。

図 6 で見たように、高速噴射した液体の不安定性には、テローの不安定性の他に、表面張力と無関係な流体力学的な不安定性がある。気液密度比が小さいときには、剪断層厚みに基づいて作ったレイノルズ数が臨界レイノルズ数を越えると、噴射液表面上に発達した気相剪断層が自然に不安定化する(下流の乱れの影響は音速で上流に伝わるのでフィードバックループが常に確立されると考えてよい)。従って、噴射速度が大きくて、テローの不安定性が励起されなくても、下流にいて剪断層厚みが増し臨界レイノルズ数に達すると、噴流は乱流化する。これより、高速噴射液の乱流微粒化に至る道には 2 通りあることがわかる。1 つは、これまでの議論で念頭に置いてきたように、最初にテローに不安定性が発生し、その後流れが乱流化する場合である。もう 1 つは、テローの不安定性が発生せず、噴射液が流体力学的に不安定になって乱流化し、その乱れによって液面が変形して噴霧化する場合である。特に、噴射液が表面を持たないような非常に圧力が高いときには、速やかな噴射液と周囲気体の混合を実現しようとするれば、後者の道筋に沿った乱流混合しかない。さらに、高圧では低速噴射でも同様の事柄が言えることに注意しよう。図 2(b) に見えるノズルから遠く離れた位置での液滴生成は、噴射液の流体力学的不安定性が発生した後に、成長した剪断層に励起された不安定性[13]によってもたらされているものである。液面が存在する限り、テローの不安定性が消えても、レーリーの不安定性は残る。下流にいて剪断層の厚みが厚くなると、流れの効果が効いてきて、レーリーの不安定性とカップルした不安定性が現れて、短い間隔での液柱の分断が起きるようになる。

### 3. 結言

近臨界混合表面液ジェットで観察された特異な微粒化特

性の原因を考えるための解析をおこなった。テローの不安定性の数理構造を明らかにすることによって、乱流微粒化を考える上で重要な概念を幾つか導くことができた。特に、

- (i) 噴射液の剪断層厚みに基づいて作ったレイノルズ数で見ると、テローの不安定性が現れるのはレイノルズ数が比較的小きな値を取る範囲に限られる、
- (ii) テローの不安定性の発生が下流の擾乱源からの表面張力波の伝播を通して起きる、
- (iii) テローの不安定性の増幅率は、表面張力を除いて噴射液の表面特性量には依存せず、バルクな気体と液体の特性量によって決まる

ことを見出したことは、今後の乱流微粒化機構の解明と微粒化技術の開発において重要な寄与をなすものであると考えている。

本研究では噴射液速度に比べて蒸発速度が小さい場合を対象にしているため蒸発の影響については触れていない。しかし、本論文で展開した解析によれば、テローの不安定性に対する蒸発の影響は外部解を通してしか現れないことが知れる。簡単な計算によって、一様湧出速度の外部場への付加(蒸発の影響)はテローの不安定性の増幅率にんの変化をもたらさないことが確かめられることを付記しておく。

### 4. 記号

- $A$  : 係数
- $a$  : 液柱半径
- $B$  : 係数
- $C$  : 係数
- $c$  : 複素位相速度
- $D$  : 係数
- $F$  : 関数
- $g$  : 関数
- $h$  : 関数
- $I$  : 第 1 種の変形されたベッセル関数
- $K$  : 第 2 種の変形されたベッセル関数
- $k$  : 波数
- $\ell$  : 代表波長
- $P$  : 擾乱圧力の複素振幅
- $p$  : 圧力
- $Q$  : 無次元パラメータ
- $r$  : 動径座標
- $Re$  : レイノルズ数
- $t$  : 時間
- $U$  : 基礎流速, 擾乱速度の複素振幅
- $u$  :  $x$  方向速度成分
- $V$  : 擾乱速度の複素振幅
- $v$  :  $y$  方向速度成分,  $r$  方向速度成分
- $x$  : 変形前の界面に沿って基礎流の方向に取った座標

$Y$  : 界面変位  
 $y$  : 変形前の界面に直角に気相側に向かって取った座標

$\Delta$  : 界面変位振幅  
 $\delta$  : 剪断層厚み  
 $\varepsilon$  : 濃度境界層厚  
 $\eta$  : 変形した界面から  $y$  方向に取った座標  
 $\mu$  : 粘性係数  
 $\nu$  : 動粘性係数  
 $\xi$  :  $x$  座標と同じ座標  
 $\rho$  : 密度  
 $\sigma$  : 表面張力  
 $\omega$  : 増幅率

上付添字

' : 擾乱量  
 $\wedge$  : 無次元量

下付添字

$s$  : 界面  
 $0$  : 基礎流  
 $*$  : 液相  
 $\infty$  : 一様流

## 謝辞

本研究は (財) 日本宇宙フォーラムの宇宙環境利用に関する公募地上研究 (重点研究) と文部科学省科学研究補助金 (基盤研究 (B)) の補助を受けて行われた。ここに記して謝意を表する。

## References

1. Bachelor, G. K., *Collected Works of G. I. Taylor*, Cambridge U. P., Cambridge, 1958
2. Li, J., Renard, Y., and Renard, M., *Phys. Fluids* 10: 3056-3071 (1998)
3. Rayleigh, L., *The Theory of Sound*, vol. 2, Dover, NY, 1945, pp. 351-365.
4. Dombrowski, N., and Fraser, R. P., *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* 237: 101-130 (1954).
5. Mayer, W. and Tamura, H., *J. Propulsion and Power* 12: 1137-1147 (1996).
6. Umemura, A. and Shimada, Y., *Proc. Combust. Inst.* 26: 1621-1628 (1996).
7. Umemura, A. and Wakashima, Y., *Proc. Combust. Inst.* 29, (2002), (in print).
8. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, NY, 1979.
9. Suwa, M, *Master thesis*, Nagoya University, 2002.
10. Osborne, M. R., *SIAM J. Applied Math.* 15: 539-558 (1967).
11. Squire, H. B., *Proc. Roy. Soc., London A* 142: 621-628 (1933).
12. Umemura, A., *Trans. Japan Soc. Mech. Engrs.* B 68: 1784-1791(2002).
13. Hiroyasu, H., Arai, M. and Shimizu, M., *Proc. of Fifth ICLASS*, 1991, pp.275-282.
14. Umemura, A. and Wakashima, Y., *Trans. Japan Soc. Mech. Engrs.* B 68: 892-898 (2002).